В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ

В.А. ЯРОВЕНКО

ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ

ПО ГЕОМЕТРИИ

Дифференцированный подход

10 КЛАСС

В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ

ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ ПО ГЕОМЕТРИИ

к учебному комплекту
Л.С. Атанасяна и др.
(М.: Просвещение)

10 класс

МОСКВА • «ВАКО» • 2010

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21
П64

Составитель выражает благодарность всем,
кто принимал участие в создании учебно-методического издания

П64 **Поурочные** разработки по геометрии: 10 класс / Сост. В.А. Яровенко. – М.: ВАКО, 2010. – 304 с. – (В помощь школьному учителю).

ISBN 978-5-408-00211-5

В подробных поурочных разработках по геометрии для 10 класса приводятся основные темы стереометрии – раздела геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве. Издание содержит варианты уроков, справочные и тестовые материалы, контрольные и самостоятельные работы, зачеты, карточки и вопросы для углубленного изучения геометрии.

Пособие адресовано прежде всего учителям, работающим с учебным комплектом Л.С. Атанасяна и др. (М.: Просвещение), также может полноценно использоваться с учебниками других авторов.

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-408-00211-5

ОТ СОСТАВИТЕЛЯ

Назначение данной книги состоит в том, чтобы оказать помощь учителям в преподавании геометрии в 10–11 классах по учебнику Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова, С.Б. Кадомцева и др. (М.: Просвещение).

В книге содержится поурочное планирование изучения учебного материала, сформулированы задачи уроков и даны примерные планы их проведения, приведены комментарии по наиболее важным вопросам теории, решения некоторых задач из учебника, тексты самостоятельных и контрольных работ, образцы слайдов, карточки-задания для проведения зачетов по разным темам.

Учителю следует исходить из того, что изучение курса стереометрии должно базироваться на сочетании наглядности и логической строгости. Опора на наглядность – непременное условие успешного усвоения материала, и в связи с этим нужно уделить большое внимание правильному изображению на чертеже пространственных фигур. Хотя правила изображения приведены в конце учебника, с самого начала необходимо показывать учащимся, как нужно изображать те или иные фигуры, поскольку при работе по данному учебнику уже на первых уроках появляются куб, параллелепипед, тетраэдр.

Важная роль при изучении стереометрии отводится задачам. Учебник содержит большое количество разнообразных по трудности задач, что дает возможность осуществить индивидуальный подход к учащимся, в частности, организовать работу с наиболее сильными учениками, проявляющими интерес к математике.

Учителю следует иметь в виду, что все приведенные в книге рекомендации являются примерными, их не нужно рассматривать как обязательные. В зависимости от уровня математической подготовки учащихся конкретного класса учитель может и должен вносить коррективы в предлагаемые рекомендации по проведению урока, по подбору заданий для классной и домашней работы.

Аксиомы стереометрии и их следствия (5 ч)

Предмет стереометрии. Аксиомы стереометрии. Некоторые следствия из аксиом.

Параллельность прямых и плоскостей (19 ч)

Параллельность прямых, прямой и плоскости (5 ч)

Параллельные прямые в пространстве. Параллельность прямой и плоскости.

Взаимное расположение прямых в пространстве. Угол между двумя прямыми (5 ч)

Скрещивающиеся прямые. Углы с сонаправленными сторонами. Угол между прямыми. Угол между двумя прямыми».

Параллельность плоскостей (3 ч)

Параллельные плоскости. Признак параллельности плоскостей. Свойства параллельных плоскостей.

Тетраэдр. Параллелепипед (64 ч)

Тетраэдр. Параллелепипед.

Перпендикулярность прямых и плоскостей (20 ч)

Перпендикулярность прямой и плоскости (6 ч)

Перпендикулярные прямые в пространстве. Параллельные прямые, перпендикулярные к плоскости. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Теорема о прямой, перпендикулярной к плоскости.

Перпендикуляр и наклонная. Угол между прямой и плоскостью (6 ч)

Расстояние от точки до плоскости. Теорема о трех перпендикулярах. Угол между прямой и плоскостью.

Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей (8 ч)

Двугранный угол. Признак перпендикулярности двух плоскостей. Прямоугольный параллелепипед

Многогранники (12 ч)

Понятие многогранника. Призма. **(4 ч)**

Понятие многогранника. Призма. Площадь поверхности призмы.

Пирамида **(5 ч)**

Пирамида. Правильная пирамида. Усеченная пирамида. Площадь поверхности усеченной пирамиды.

Правильные многогранники (3 ч)

Симметрия в пространстве. Понятие правильного многогранника. Элементы симметрии правильных многогранников.

Векторы в пространстве (6 ч)

Понятие вектора в пространстве (1 ч)

Понятие векторов. Равенство векторов.

Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число (2 ч)

Сложение и вычитание векторов. Сумма нескольких векторов. Умножение вектора на число.

Компланарные векторы (3 ч)

Компланарные векторы. Правило параллелепипеда. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам.

Итоговое повторение курса геометрии (6 ч)

Аксиомы стереометрии и их следствия. Параллельность прямых и плоскостей. Теорема о трех перпендикулярах, угол между прямой и плоскостью. Векторы в пространстве, их применение к решению задач.

Введение

АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ И ИХ СЛЕДСТВИЯ

(уроки 1–6)

Урок 1. Предмет стереометрии. Аксиомы стереометрии

Цели урока:

1) ознакомить учащихся с содержанием курса стереометрии;
2) изучить аксиомы о взаимном расположении точек, прямых и плоскостей в пространстве.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Новый материал

Учитель знакомит с понятием стереометрии: Мы с вами с 7 класса начали знакомиться со школьным курсом геометрии.

Вопрос к учащимся: что такое геометрия? (Геометрия – наука о свойствах геометрических фигур. Слово «геометрия» – греческое, в переводе – «землемерие». Такое название связано с применением геометрии для измерений на местности.) В 7–9 классах мы с вами изучали первый раздел геометрии – планиметрию.

Вопрос к учащимся: что такое планиметрия? (Планиметрия – раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур на плоскости.)

Вспомним основные понятия планиметрии (см. плакат 1) (точка, прямая: обозначение, изображение).

Плакат 1

Основные понятия планиметрии

Необходимо отметить, что эти понятия не определяемы, они принимаются интуитивно.

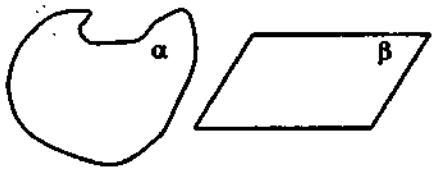
Сегодня мы приступим к изучению нового раздела геометрии – стереометрии.

Определение учащиеся записывают в тетрадь под руководством учителя (стр. 3 учебника): Стереометрия – раздел геометрии, в котором изучается свойства фигур в пространстве.

Основные фигуры в пространстве: точка, прямая и плоскость (см. плакат 1).

Представление плоскости дает гладкая поверхность стены, стола.

Плоскость как геометрическую фигуру следует представлять себе простирающейся во все стороны, не ограниченной.



Учитель изображает на доске, учащиеся в тетради.

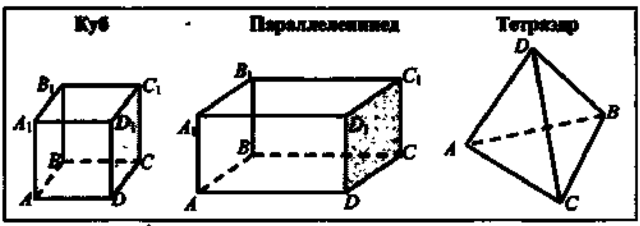
Плоскости обозначаются греческими буквами α, β, γ и т.д.

Необходимо отметить, что об этих фигурах мы имеем наглядное представление, но определения этих фигур в геометрии не даются. Их свойства выражены в аксиомах. С ними мы познакомимся немного позже.

Наряду с точкой, прямой и плоскостью в стереометрии рассматривают геометрические тела, изучают их свойства, вычисляют их площади и объемы. Представление о геометрических телах дают окружающие нас предметы.

Учитель показывает модели и приводит примеры из окружающей действительности (см. плакат 2).

Плакат 2



Учащиеся изображают в тетрадях куб и выделяют другим цветом некоторые элементы (точки, отрезки), например: точка A, отрезок BC.

Теперь рассмотрим аксиомы стереометрии.

Вопрос к учащимся:

1) Что такое аксиома? (Аксиома – утверждение о свойствах геометрических фигур, принимается в качестве исходных положений, на основе которых доказываются далее теоремы и вообще строится вся геометрия.)

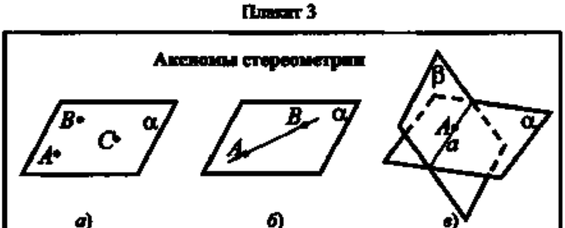
2) Какие аксиомы планиметрии вы знаете?

- через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну.
- из трех точек прямой одна, и только одна, лежит между двумя другими.

Основные свойства точек, прямых и плоскостей, касающиеся их взаимного расположения, выражены в аксиомах:

A_1. Через любые 3 точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость и притом только одна.

Плакат 3



Учащиеся под руководством учителя выписывают в тетрадь из учебника (стр. 5) аксиому A_1. Делают рисунок *а*) с плаката 3:

Важно отметить, что если взять не 3, а 4 произвольные точки, то через них может не проходить ни одна плоскость, то есть 4 точки могут не лежать в одной плоскости.

A_2. Если 2 точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости (см. плакат 3, рис. *б*).

Ученики делают запись и рисунок в тетрадь.

В этом случае говорят, что прямая лежит в плоскости или плоскость проходит через прямую.

A_3. Если 2 плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

Говорят, плоскости пересекаются по прямой (см. плакат, 3 рис. *в*).

Ученики делают запись на рисунок в тетрадь.

III. Закрепление изученного материала

1. Прочитать формулировки аксиом A_1–A_3.
2. Решаем задачи:

Учащиеся читают условие задачи по учебнику стр. 7–8 и дают ответ с объяснениями.

Задача 1*(а, б)* с. 7.

Ответ:

а) Точки P и E лежат в плоскости (ADB), а значит и прямая PE лежит в плоскости (ADB) (по A_2). Аналогично MK лежит в плоскости (BDC). Точки B и D лежат одновременно в плоскостях (ADB) и (BDC), а значит прямая BD лежит в плоскостях (ADB) и (ABC).

Аналогично AB лежит в плоскостях (ADB) и (ABC).

Точки C и E лежат одновременно в плоскостях (ABC) и (DEC), а значит прямая CE лежит в этих же плоскостях.

б) Заметим, что точка C лежит на прямой (DK) и в плоскости ABC, а следовательно, $DK \cap (ABC)$ в точке C, так как точек пересечения более одной (прямая не лежит в плоскости), то это единственная точка.

Аналогично CE пересекается с плоскостью (ADB) в точке E.

Задача 2(а) с. 7.

Ответ: а) В плоскости DCC_1: D, C, C_1, D_1, K, M, R (см. № 1). В плоскости BQC: B_1, B, P, Q, C_1, M, C.

IV. Подведение итогов

Мы познакомились с новым разделом геометрии – стереометрией, узнали новые аксиомы и использовали их при решении задач.

Объявление оценок (с комментариями).

Домашнее задание

Повторить аксиомы планиметрии.

Выучить аксиомы A_1–A_3.

Прочитать пункт 1–2.

Задача 1*(в, г)*

Ответы:

в) в плоскости ADB лежат точки: A, D, B, E, P, M, так как точка E лежит на прямой AB, а значит, и в плоскости ABD. В плоскости DBC лежат точки: D, B, C, M, K.

г) плоскости ABC и DCB пересекаются прямой BC, так как обе точки B и C лежат в обеих плоскостях. Аналогично: ABD пересекается с CDA по прямой AD. Так как точка E принадлежит PD, значит, E принадлежит PDC и так как точка C принадлежит PDC, то прямая CE принадлежит PDC, а так как CE принадлежит ABC, то плоскости ABC и PDC пересекаются по прямой CE.

***Задача 2** (б, д)*

Ответы:

б) AA_1B_1; AA_1D_1.

д) $MK \cap DC = R$; $B_1C_1 \cap BP = Q$; $C_1M \cap DC = C$.

Дополнительно:

Вариант I

3. [а) да, см. A_1 б) нет в) нет. В качестве примера можно взять квадрат г) да – это A_1].

Вариант II

4. (а) [нет. Если A, B, C лежат на одной прямой, то через A, C, D можно провести плоскость (A_1). Тогда точка B лежит в плоскости α, так как точка B лежит на прямой AC, а значит, точки A, B, C, D лежат в одной плоскости].

Вариант III

4. (б) [нет. Так как, если AB и CD пересекаются, то через них можно провести плоскость (это теорема), а значит, A, B, C, D лежат в одной плоскости. Противоречие.]

Урок 2. Некоторые следствия из аксиом

Цель урока:

– ознакомить учащихся с данной темой, показать применение аксиом к решению задач.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Проверка домашнего задания

Вопросы учащимся:

а) Решение задачи 3(а) – учащиеся дают обоснованный ответ (да – первый случай аксиома A_1, второй случай аксиома A_2.

б) Сформулировать аксиомы планиметрии.

в) Сформулировать аксиомы A_1–A_3 стереометрии.

III. Новый материал

Докажем следствие из аксиом.

Теорема 1. Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.

Учащиеся записывают формулировку теоремы – стр. 6 учебника.

Дано: a, $M \notin a$.

Доказать: $(a, M) \subset \alpha$.

Доказательство: Отметим, что теорема содержит два утверждения: 1. О существовании плоскости. 2. О единственности плоскости.

а) Рассмотрим прямую *a* и не лежащую на ней точку *M*. Докажем, что через прямую а и точку *M* проходит плоскость. Отметим на прямой а 2 точки: *P* и *Q*. Точки *M*, *P* и *Q* не лежат на одной прямой, поэтому согласно аксиоме A_1 через эти точки проходит некоторая плоскость α. Так как 2 точки прямой *a* (*P* и *Q*) лежат в плоскости α, то по аксиоме A_2 плоскость α проходит через прямую *a*.

б) Единственность плоскости, проходящей через прямую *A* и точку *M*, следует из того, что любая плоскость, проходящая через прямую а и точку *M*, проходит через точки *M*, *P* и *Q*. Следовательно, эта плоскость совпадет с плоскостью α, так как по аксиоме A_1 через точки *M*, *P* и *Q* проходит только одна плоскость.

Теорема доказана.

Теорема 2. Через 2 пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.

Формулировку учащиеся записывают в тетрадь под руководством учителя с учебника (стр. 7).

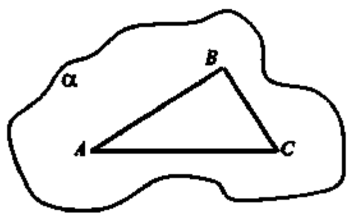
Устно разбирают доказательство, а запись выполняют дома.

Учитель обращает внимание учащихся, что данная теорема также состоит их 2 утверждений: существования и единственности, и доказательство опирается не на аксиомы, а на следствие 1.

III. Закрепление изученного материала

Учащиеся работают в тетрадях.

Один учащийся выходит к доске и решает задачу 6, случай 1: точки лежат на одной прямой.



Дано: AB, BC, AC.

Доказать: (*AB*, *BC*, *AC*) $\subset$ (*ABC*).

Доказательство: 1) (*A*, *B*, *C*)$\in$*a*, так как 3 точки принадлежат одной прямой, то по A_2 (*A*, *B*, *C*)$\in$*ABC*;

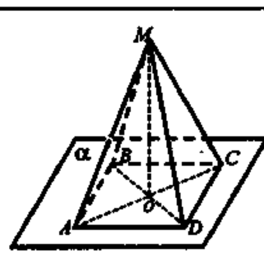
2) (*A*, *B*, *C*) $\in$ *a*. Через *A*, *B* и *C* по A_1 проходит единственная плоскость. 2 точки каждого из отрезков *AB*, *AC* и *BC* лежат в плоскости, следовательно, по A_2 прямые *AB*, *BC*, *AC*, а значит, и отрезки *AB*, *BC*, *AC* лежат в плоскости и т. д.

Задача с плаката

ABCD – ромб, *O* – точка пересечения его диагоналей, *M* – точка пространства, не лежащая в плоскости ромба. Точки A, D, O лежат в плоскости α.

Дайте ответ на поставленные вопросы с необходимыми обоснованиями.

1) Лежат ли в плоскости α точки *B* и *C*?
2) Лежит ли в плоскости *MOB* точка *D*?
3) Назовите линию пересечения плоскостей *MOB* и *ADO*.



4) Вычислите площадь ромба, если сторона его равна 4 см, а угол равен 60°. Предложите различные способы вычисления площади ромба.

Учащиеся работают в тетради, предварительно сделав чертеж.

Дано: $ABCD$ – ромб, $AC \cap BD = O$, $M \in \alpha$, $(A, D, O) \in \alpha$.

$AB = 4$ см, $\angle A = 60°$.

Найти: $(B, C) \in \alpha$, $D \in MOB$, $MOB \cap ADO$, S_{ABCD}.

Решение: Учитель проводит фронтальную работу по вопросам плаката.

1) $D \in \alpha$, $O \in \alpha$, то по A_2 $DO \subset \alpha$, так как $B \in DO$, то $B \in \alpha$.

Аналогично $A \in \alpha$, $O \in \alpha$, то по A_2 $AO \subset \alpha$, так как $C \in AO$, то $C \in \alpha$.

2) $OB \subset MOB$, $D \in OB$, то $D \in MOB$.

3) $O \in MOB$, $O \in ADO$.

$B \in MOB$, $B \in ADO \Rightarrow MOB \cap ADO = BO$, но так как BO – часть DB, то $MOB \cap ADO = DB$.

Учитель обращает внимание учащихся на тот факт, что если 2 плоскости имеют общие точки, то они пересекаются по прямой, проходящей через эти точки.

4) $S_{\text{ромба}} = 4 \cdot 4 \cdot \sin 60° = 8\sqrt{3}$ (см^2).

IV. Подведение итогов

Цель урока достигнута. Аксиомы стереометрии повторили, познакомили со следствиями и применили их при решении задач.

V. Оценки (с комментариями)

Домашнее задание

П. 2, 3, стр. 4–7.

Теорема 2, стр. 7 – записать доказательство.

Повторить A_1–A_3.

Задача 8

Ответ:

а) нет, окружность можно вращать вокруг прямой, соединяющей эти две точки;

б) да.

Урок 3. Решение задач на применение аксиом стереометрии и их следствий

Цель урока:

– сформировать навык применения аксиом стереометрии и их следствий при решении задач.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся

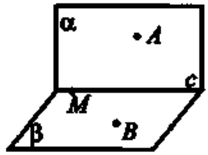
1. Проверяется домашнее задание. Учитель отвечает на вопросы учащихся по домашней работе.

Двое учащихся готовят у доски доказательство следствий из аксиом.

Двое учащихся (I уровень) и двое учащихся (II уровень) работают по карточкам индивидуального опроса.

Карточка 1 (I уровень)

1. В пересекающихся плоскостях α и β взяты соответственно точки A и B, которые не лежат на линии их пересечения (прямой c). Точка M лежит на прямой c.
   1) Построить линию пересечения плоскостей: а) α и MAB; б) β и MAB.
   2) Найти общую точку плоскостей α, β и AMB.
2. Запишите символически и выполните рисунок: Прямая AB пересекает плоскость α в точке O, а прямая CD лежит в плоскости α.

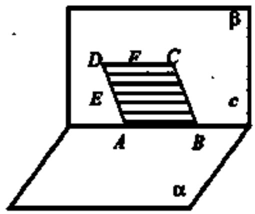


Карточка 1 (II уровень)

1. Через сторону AB ромба $ABCD$ проведена плоскость α. Точки E, F – середина стороны AD и DC.
   1) Постройте точку пересечения прямой EF с плоскостью α.
   2) Вычислите расстояние от этой точки до точек A и B, если $BC = 12$ см.

(*Ответ*: 6 см и 18 см.)

2. Выполните рисунок: $\alpha \neq \beta$ $\alpha \cap \beta = a$, $M \in a$, $AB \subset \beta$.



Остальные учащиеся работают по готовому чертежу и отвечают на вопросы (фронтальная работа).

2. Устная работа.

а) *Дан* куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Найдите: 1) несколько точек, которые лежат в плоскости α; 2) несколько точек, которые не лежат в плоскости α; 3) несколько прямых, которые лежат в плоскости α; 4) несколько прямых, которые не лежат в плоскости α; 5) несколько прямых, которые пересекают прямую BC; 6) несколько прямых, которые не пересекаются прямую BC.

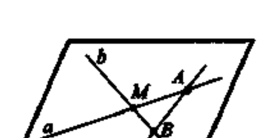
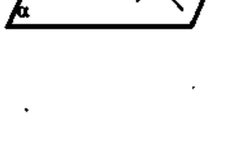


Рис. 1

б) Заполните пропуски, чтобы получилось верное утверждение: 1) если $A \in \alpha$, $a \subset \alpha$, то A…α (пересекает); 2) если $A \in \alpha$; $B \notin \alpha$, то AB…α (принадлежит); 3) если $A \in \alpha$; $B \in \alpha$; $C \in AB$, то C…α (принадлежит); 4) если $M \in \alpha$; $M \in \beta$, $\alpha \subset \beta = a$, то M…a (принадлежит).



Заслушиваются ответы учащихся у доски.

III. Решение задач

Задача № 7

Дано: $a \cap b = M$, $c \cap a = A$, $c \cap b = B$, $M \notin c$.

Доказать: 1. $a \subset \alpha$; $b \cap \alpha$; $c \subset \alpha$; 2. Лежат ли в одной плоскости все прямые, проходящие через точку M?

Решение: 1. Согласно второму следствию, пересекающиеся прямые a и b принадлежат плоскости α, следовательно, по аксиоме A_2 прямая c лежит в плоскости α; $a \cap b = M \Rightarrow \alpha$; $a \subset \alpha$; $b \subset \alpha$; $\left.\begin{array}{l} A \in a, \subset \alpha \Rightarrow \in \alpha \\ A \in c, B \subset c \end{array}\right| \Rightarrow c \subset \alpha$. (аксиома A_2).

2. Все прямые, проходящие через точку M, не обязательно лежат в одной плоскости. Проиллюстрировать это утверждение на примере куба (см. рис. 1). AA_1, AB, AD проходят через точку A, но очевидно, не лежат в одной плоскости.

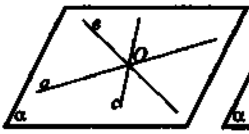


Рис. 2

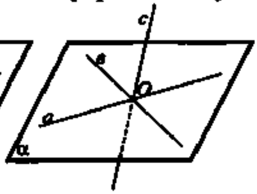


Рис. 3

Задача № 14

Решение: *1.* Все прямые a, b, c лежат в одной плоскости. В этом случае, по следствию 2 можно провести плоскости, и через три прямые проходит одна плоскость (рис. 2).

2. Одна из трех прямых (c) не лежит в плоскости α, определяемой другими прямыми a и b. В этом случае через заданные три прямые проходят три различные плоскости, определяемые парами прямых a и b, a и c, b и c (см. рис. 3).

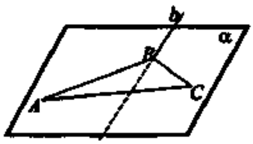


Рис. 4

Задача № 10

Решение: а) Аналогично задаче № 7 – решить самостоятельно.

Взять выборочно тетради на проверку (рис. 4).

б) Нет (см. рис. 4). Если $ABC \subset \alpha$; $b \cap \alpha = B$, $b \not\subset \alpha$.

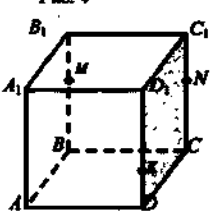


Рис. 5

Задача

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 5). Точка M лежит на ребре BB_1, точка N лежит на ребре CC_1 и точка K лежит на ребре DD_1.

а) Назовите плоскости, в которых лежат точки M; точка N.

б) Найдите точку F – точку пересечения прямых MN и BC. Каким свойством обладает точка F?

в) Найдите точку пересечения прямой KN и плоскости ABC.

г) Найдите линию пересечения плоскостей MNK и ABC.

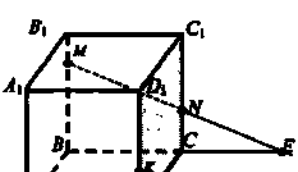


Рис. 6

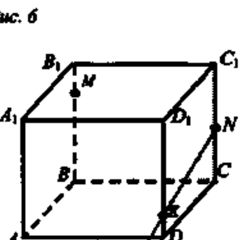


Рис. 7

Решение: При построении учащиеся проговаривают аксиомы, результат построения записывают с помощью символики. При решении данной задачи применяются аксиомы A_2 и A_3.

а) A_1B_1B и B_1BC; B_1C_1C и DD_1C.

б) 1. $MN \cap BC = F$;

2. $F \in MN, F \in BC \Rightarrow F \in BB_1C$ и $F \in ABC$.

в) $KN \cap ABC = O$.

г) $OF = ABC \cap MNK$.

1. $KN \cap DC = O$;

2. $O \in KN, DC \Rightarrow O \in ADC$ и $O \in DCC_1$.

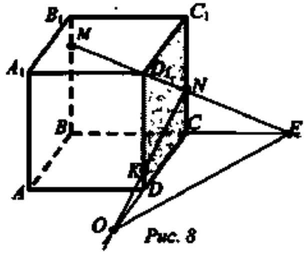


Рис. 8

Дополнительная задача

а) Докажите, что все вершины четырехугольника $ABCD$ лежат в одной плоскости, если его диагонали AC и BD пересекаются (рис. 9).

б) Вычислите площадь четырехугольника, если $AC \perp BD$, $AC = 10$ см, $CD = 12$ см.

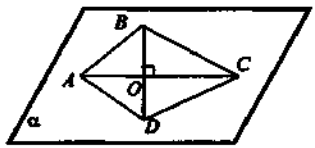


Рис. 9

Решение:

а) Согласно второму следствию из аксиом, пересекающиеся прямые AC и BD определяют некоторую плоскость α. Прямая AC лежит в плоскости α, следовательно, все точки, в том числе A и C, принадлежат этой плоскости. Аналогично доказывается, что точки B и D принадлежат плоскости α (рис. 9).

1. $AC \cap BD = O \Rightarrow \alpha$;
2. $AC \subset \alpha \Rightarrow A \in \alpha, C \in \alpha$;
3. $BD \subset \alpha \Rightarrow B \in \alpha, D \in \alpha$.

б) Воспользуемся формулой $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha$, где d_1 и d_2 – диагонали четырехугольника, а α – угол между ними. $S = \frac{1}{2} 10 \cdot 12 \sin 90° = 60$ (см^2).

IV. Подведение итогов

Оценки за урок.

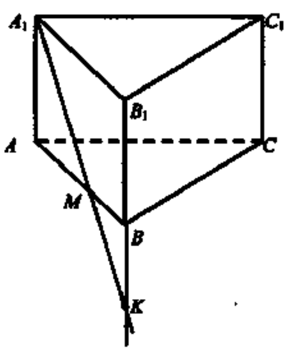
Домашнее задание

1. П. 1–3.

2. Решение задач:

I уровень – № 9, 13.

Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, $M \in AB$. Построить точку пересечения прямой A_1M с плоскостью BB_1C_1.



II уровень – № 11, 15.

Начертите изображение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, выберете точки M и N грани $ABCD$. Построение линии пересечения плоскостей ABC и A_1MN; B_1MN и BCC_1.

Задача № 9

Дано: $ABCD$ – параллелограмм (рис. 10). $AC \cap BD =$ т O, $O \in \alpha$, $A \in \alpha$, $B \in \alpha$.

Доказать: $D \in \alpha$, $C \in \alpha$.

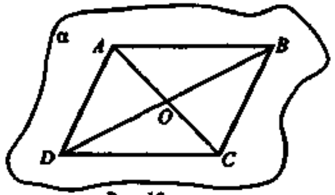


Рис. 10

Решение: Так как A и B принадлежат α, то по аксиоме A_2, прямая AB и O принадлежит плоскости α, то $AO \subset \alpha$, $C \in AO$, значит точка $C \in \alpha$. Аналогично для точки D.

Задача № 11

Дано: а) $A \in a$, $b \cap a = O$, $A \in b$ (рис. 11).

Доказать: $b \subset \alpha$.

Доказательство:

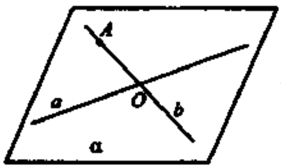


Рис. 11

1. По первому следствию из аксиомы получаем, что прямая a и точка A определяют плоскости α.
2. Возьмем любую прямую (b), которая пересекается с прямой (a) и проходит через точку A. Тогда $a \cap b = O$ и $O \in a$, значит, $O \in \alpha$. По аксиоме A_2: $b \subset \alpha$.
3. Аналогично все прямые, проходящие через точку A и пересекающие прямую a, лежат в плоскости α.

а) Нет, так как если две плоскости имеют одну общую точку, то они имеют общую прямую (по аксиоме A_3).

б) Нет. Аналогично (a).

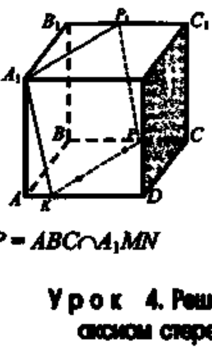
в) Да, это любые две пересекающиеся плоскости.

Задача № 15 (см. решение задачи 7)

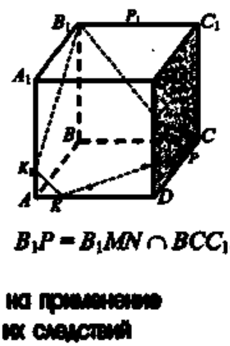
I уровень

$K = A_1M \cap BB_1C$.

II уровень



$KP = ABC \cap A_1MN$



$B_1P = B_1MN \cap BCC_1$.

Урок 4. Решение задач на применение аксиом стереометрии и их следствий

Цель урока:

– сформировать навык применения аксиом стереометрии и их следствий при решении задач.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Проверка домашнего задания

Двое учащихся у доски готовят решения задач из домашней работы – № 9, 15.

Остальные отвечают на вопросы математического диктанта.

Вариант I

1) Как называется раздел геометрии, изучающий фигуры в пространстве? (Стереометрия.)
2) Назовите основные фигуры в пространстве.
3) Сформулируйте аксиому A_2
4) Сформулируйте аксиому A_3.
5) Могут ли прямая и плоскость иметь две общие точки? (Нет.)
6) Сколько плоскостей можно провести через три точки? (Одну.)

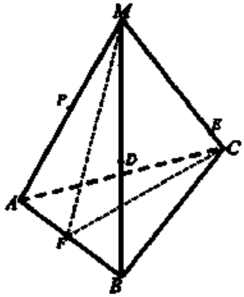
Вариант II

1) Как называется раздел геометрии, изучающий фигуры на плоскости? (Планиметрия.)
2) Назовите основные фигуры на плоскости.
3) Сформулируйте аксиому A1.
4) Сколько плоскостей можно провести через прямую и не лежащую на ней точку? (Одну.)
5) Сколько может быть общих точек у прямой и плоскости? (Одна; бесконечно много; ни одной.)
6) Могут ли прямая и плоскость иметь одну общую точку? (Да.)

Собрать листочки с ответами. Заслушать решение задач у доски.

III. Решение задач (фронтальная работа)

Задача № 1



Дан тетраэдр $MABC$, каждое ребро которого равно 6 см. $Д \in MB$, $E \in MC$, $F \in AB$, $AF = FB$, $P \in MA$.

1) Назовите прямую, по которой пересекаются плоскости: а) MAB и MFC; б) MCF и ABC.
2) Найдите длину CF и S_{ABC}.
3) Как построить точку пересечения прямой ДЕ с плоскостью АВС?

Решение:

1. а) $\left.\begin{array}{l} M \in MAB, M \in MFC, \\ F \in MAB \text{ и } F \in MFC \end{array}\right| \Rightarrow$ аксиома A_3 $MAB \cap MFC = MF$.

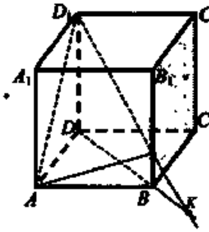
   б) $\left.\begin{array}{l} C \in MCF, C \in ABC, \\ F \in MFC \text{ и } F \in ABC \end{array}\right| \Rightarrow$ аксиома A_3 $MCF \cap ABC = FC$.

2. ΔABC – равносторонний $\Rightarrow$ FC – медиана, высота, биссектриса. ΔCFB – прямоугольный: $CB = 6$ (см), $FB = 3$ (см). По теореме Пифагора $FC = 3\sqrt{3}$ (см). $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot CF$; $S_{ABC} = 9\sqrt{3}$ (см^2).

   – Как еще можно найти длину FC?

   – Как по-другому найти S_{ABC}?

3. $ДЕ$ и $ВС$ лежат в плоскости $ВМС$. Пусть они пересекаются в точке $К$, так как $К$ принадлежит $ВС$, значит $К$ принадлежит плоскости $АВС$ (аксиома $А_2$):
1) $ДЕ \in ВМС$, $ВС \in ВМС$;
2) $ДЕ \in ВС = К$ ($К \in ВС \Rightarrow К \in АВС$).



Задача № 2

Дан куб $АВСДА_1В_1С_1Д_1$, $Р \in ВВ_1$, $В_1Р = РВ$.
1) Как построить точку пересечения плоскости $АВС$ с прямой $Д_1Р$?
2) Как построить линию пересечения плоскости $АД_1Р$ и $АВВ_1$?
3) Вычислите длину отрезков $АР$ и $АД_1$, если $АВ = а$.

Решение:

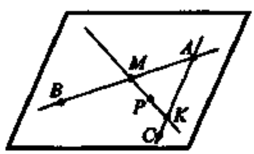
1. $Д_1Р$ и $ДВ$ лежат в одной плоскости $Д_1ДВ$. Пусть они пересекаются в точке $К$. Тогда точка $К$ принадлежит прямой $ДВ$, а значит, $К \in АВС$.

2. Точка $Р$ принадлежит $ВВ_1$, а значит, и плоскости $АВВ_1$. Точка $Р$ принадлежит $АВ$, а значит, и плоскости $АВВ_1$. Следовательно, по аксиоме $А_2$: $АР \subset АВВ_1$. Аналогично $АР \subset АД_1Р$. Значит, $АД_1Р \cap АВВ_1 = АР$.

3. а) Из $\Delta АВР$, по теореме Пифагора $АР = \frac{a}{2}\sqrt{5}$; б) Из $\Delta АДД_1$ по теореме Пифагора $АД_1 = a\sqrt{2}$.

Далее работа строится следующим образом:

I уровень *(задачи № 3, 4 – фронтальная работа)*



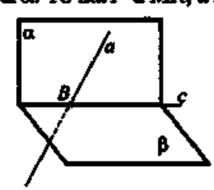
II уровень *(самостоятельная работа)*

Задача № 3

Точки $А$, $В$, $С$ не лежат на одной прямой. $М \in АВ$, $К \in АС$, $Р \in МК$.

Докажите, что точка $Р$ лежит в плоскости $АВС$.

Решение: $АВ \cap АС = А$. По второму следствию, прямые $АВ$ и $АС$ определяют плоскость α. Точка $М \in АВ$, а значит, принадлежит плоскости α, и точка $К \in АС$, а значит, и плоскости α. По аксиоме $А_2$: $МК \subset \alpha$. Точка $Р \in МК$, а значит, и плоскости α.



Задача № 4

Плоскость α и β пересекаются по прямой c. Прямая a лежит в плоскости α и пересекает плоскость β. Пересекаются ли прямые a и c? Почему?

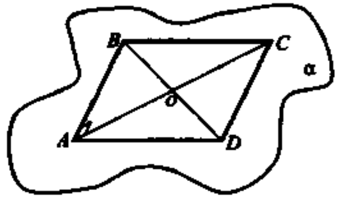
Решение: По условию, прямая a пересекает плоскость β. Пусть $a \cap \beta = B (B \in a)$. По условию прямая a принадлежит плоскости α, значит, $B \in \alpha$. По аксиоме $А_3$ существует прямая c, такая, что $B \in c$.

II уровень (самостоятельное решение задач)

1. Дан прямоугольник $АВСД$, $О$ – точка пересечения его диагоналей. Известно, что точки $А$, $В$, $О$ лежат в плоскости α. Докажите, что точки $С$ и $Д$ также лежат в плоскости α. Вычислите площадь прямоугольника, если $АС = 8$ (см), $\angle АОВ = 60°$.

Решение:

1) Так как B принадлежит α и точка O принадлежит α, то BO принадлежит α. Так как точка $Д$ принадлежит BO, то Д принадлежит α (по аксиоме A_2). Аналогично точка C принадлежит α:



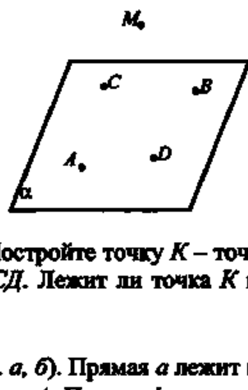
   1. $B \in \alpha$, $O \in \alpha \Rightarrow BO \subset \alpha$;
   2. $Д \in BO \Rightarrow Д \in \alpha$ (акс. A_2);
   3. $A \in \alpha$, $O \in \alpha \Rightarrow AO \subset \alpha$;
   4. $C \in AO \Rightarrow C \subset \alpha$ (акс. A_2).

2) Возможны различные способы решения задачи:
   1. Найти стороны прямоугольника.
   2. Использовать тот известный факт, что диагонали параллелограмма (прямоугольника) разбивают его на четыре равновеликих треугольника, и найти сначала площадь одного из треугольников.
   3. Использовать формулу $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha$.

(*Ответ*: $16\sqrt{3}$ см^2.)

IV. Подведение итогов

Оценки за урок.



Домашнее задание

П. 1–3.

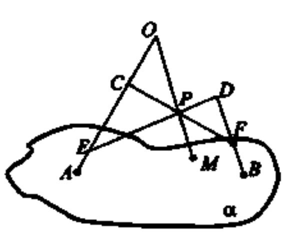
I уровень

1. Прямые a и b пересекаются в точке O, $A \in \alpha$, $B \in b$, $P \in AB$. Докажите, что прямые a и b и точка P лежат в одной плоскости.
2. На данном рисунке плоскость α содержит точки A, B, C, $Д$, но не содержит точку M. Постройте точку K – точку пересечения прямой AB и плоскости $MCД$. Лежит ли точка K в плоскости α?

II уровень

1. Даны пересекающиеся плоскости β и α (рис. *а*, *б*). Прямая a лежит в плоскости α и пересекает плоскость β в точке A. Прямая b лежит в плоскости β и пересекает α в точке B. Докажите, что AB – линия пересечения плоскости α и β.

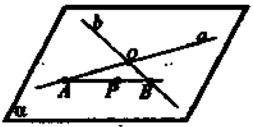
а)



б)

2. На рисунке найдите ошибку. Дайте объяснение. Сделайте верный чертеж.

Решение:



I уровень

Дано: $a \cap b = O, A \in a, B \in b, P \in AB$.

Доказать: $a \subset \alpha, b \subset \alpha, P \in \alpha$.

Доказательство:

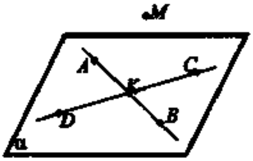
1. $a \cap b = O \Rightarrow \alpha$;

2. $\left.\begin{matrix} B \in b, B \in \alpha \\ A \in b, A \in \alpha \end{matrix}\right| \Rightarrow AB \subset \alpha$;

3. $P \in AB$ и $AB \subset \alpha \Rightarrow P \in \alpha$.

4. 1. $\{A, D, C\} \Rightarrow \beta$; 2. $\alpha \cap \beta = DC$;

3. $DC \subset \alpha, DC \subset \beta \Rightarrow K = AB \cap DC$.

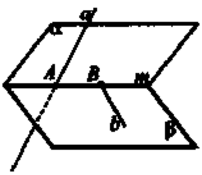


II уровень

Дано: $\alpha \cap \beta = m$, $a \subset \alpha$, $a \cap \beta = A$, $b \subset \beta$, $b \cap \alpha = B$.

Доказать: $\alpha \cap \beta = AB$.

Доказательство:



$\left.\begin{matrix} b \subset \beta \Rightarrow B \in \beta \\ \beta \cap \alpha = B \Rightarrow B \in \alpha \\ a \subset \alpha \Rightarrow A \in \alpha \\ a \cap b = A \Rightarrow A \in \beta \end{matrix}\right| \Rightarrow$ (по акс. A_3) $A \in m$, $B \in m$.

Урок 5. Решение задач на применение аксиом стереометрии и их следствий. Самостоятельная работа (20 мин)

Цель урока:

– закрепить усвоение вопросов теории в процессе решения; проверить уровень подготовленности учащихся путем проведения самостоятельной работы контролирующего характера.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Проверка домашнего задания

Учитель отвечает на вопросы учащихся. У нескольких учащихся взять на проверку тетради с домашней работой.

III. Решение задач на повторение теории (п. 1–3) на доске

Задача № 1

Стороны AB и AC треугольника ABC лежат в плоскости α. Докажите, что и медиана лежит в плоскости α (рис. 1).

Решение: В ходе решения этой задачи повторяются формулировки аксиом и следствий из них.

1. Так как AB принадлежит плоскости α, то точка B принадлежит плоскости α. Аналогично точка C принадлежит плоскости α.

2. По аксиоме A_2 сторона BC принадлежит плоскости α. Так как точка M принадлежит стороне BC, то точка M принадлежит плоскости α.

3. Точка A принадлежит α и точка M принадлежит плоскости α. По аксиоме A_2, медиана AM принадлежит плоскости α.

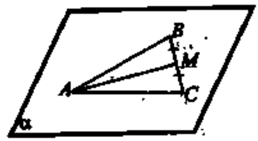
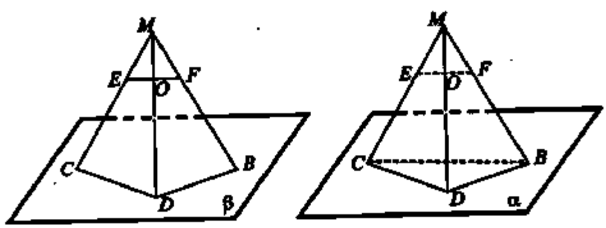


Рис. 1

Задача № 2

В чем ошибка чертежа, где $O \in EF$. Дайте объяснение. Сделайте верный чертеж. (*Ответ*: $\left.\begin{array}{l}EF \subset MCB\\ O \in EF\end{array}\right| \Rightarrow O \in MCB,\ O \in MD.$)



а) б)

Рис. 2

Самостоятельная работа (20 мин) (см. приложение)

Ответы к самостоятельной работе

		1	2	3		
		а	б	в		
I уровень	I	*S, K, M, A*	*ABC*	*SC*	Да	Точка принадлежит прямой
	II	*A, C, M, N*	*ASB*	*AC*	Да	Лежат на одной прямой
II уровень	I	*ABC* и *DEF*	*EF*	*ABC*	Нет	Пересекаются
	II	*SBC* и *DEF*	*DE*	*ABS*	Да	Пересекаются
III уровень	I	BC_1C и B_1A_1C	A_1D	AA_1B	Да	Лежат на одной прямой
	II	A_1B_1A и A_1B_1D	AB_1	AA_1D	Нет	Лежит на одной прямой

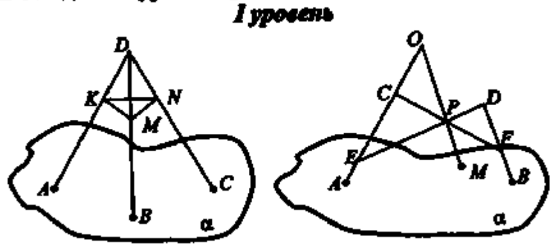
IV. Подведение итогов

1. Собрать тетради с самостоятельной работой.
2. Оценки за урок.

Домашнее задание

П. 1–3. В каждом из уровней решить противоположный вариант.

I уровень



а) б)

Рис. 6

1. $\{K, N\} \in ADC \Rightarrow KN \subset ADC$;
2. $\{K, M\} \in ADB \Rightarrow KM \subset ADB$;
3. $\{M, N\} \in CDB \Rightarrow MN \subset CDB$;
4. $M \notin KN \Rightarrow M \notin FDC$;

1. $\{C, F\} \in AOB \Rightarrow CF \in AOB$;
2. $\{E, D\} \in AOB \Rightarrow ED \in AOD$;
3. $CF \cap ED = P$;
4. $OM \not\subset AOD, P \notin OM$, $OM \cap AOB = O$;

II уровень

Вариант I

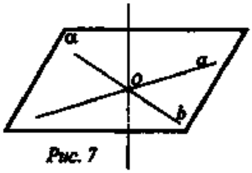


Рис. 7

№ 2. *Дано*: $a \cap b = 0$, $b \cap c = 0$, $c \cap a = 0$ (рис. 7).

Решение: Две прямые обязательно лежат в одной плоскости (следствие из аксиом), а третья прямая может как лежать, так и не лежать в плоскости α. $a \subset \alpha$, – ?; $b \subset \alpha$, – ?; $c \subset \alpha$, – ?

(*Ответ*: Нет.)

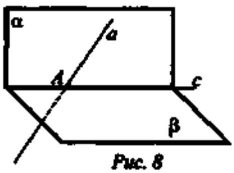


Рис. 8

№ 3. *Дано*: $\alpha \cap \beta = c$, $a \subset \alpha$, $a \cap \beta = A$ (рис. 8). Каково взаимное расположение a и c – ?

Решение:

1. $A \in a, a \cap \beta = A \in \beta$
2. $\alpha \cap \beta = c \Rightarrow C \subset \alpha$ и $C \subset \beta$

$\Rightarrow A \in C$.

3. $a \subset \alpha, a \cap \beta = A, A \in c \Rightarrow a \cap c = A$.

(*Ответ*: a пересекается с прямой c в точке A.)

Вариант II

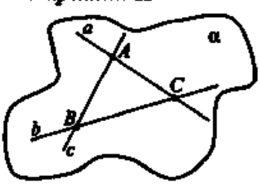


Рис. 9

№ 2. *Дано*: $a \cap b$, $b \cap c$, $c \cap a$ (рис. 9). $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $c \subset \alpha$ – ?

Решение:

1. $a \cap b = C \Rightarrow \alpha$.
2. $a \cap c = A, A \in a, a \subset \alpha| \Rightarrow A \in \alpha$; $b \cap c = B$, $B \in b, b \subset \alpha| \Rightarrow B \in \alpha$;

№ 3. *Дано*: $A \cap \alpha, B \in a, A \in c, B \in c \mid \Rightarrow$ $\Rightarrow$(аксиома A_2) $C \subset \alpha$ $A \in \alpha$; $A \in \alpha, B \in \alpha, A \in c$, $B \in c \Rightarrow c \subset \alpha$. (*Ответ*: Да.)

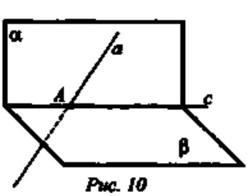


Рис. 10

№ 3. *Дано*: $\alpha \cap \beta = c$, $A \subset \alpha$, $a \cap c = A$, $a \cap C = A, A \in a, a \subset \alpha \mid \Rightarrow A \in \alpha$ (рис. 10);

Каково взаимное расположение прямой a и плоскости β – ?

Решение:

1. $\alpha \cap \beta = c \Rightarrow c \subset \alpha$ и $c \subset \beta$.
2. $a \subset \alpha, a \cap c = A \Rightarrow A \in a$ и $A \in c$.
3. $A \in c, c \subset \beta \Rightarrow A \in \beta$.
4. $A \in \alpha, A \in \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = A$, но $A \in a \Rightarrow a \cap \beta = A$.

(*Ответ*: прямая a пересекает плоскость β.)

III уровень

Вариант I

№ 2. *Дано*: $a \cap \beta$, $b \cap c$, $a \subset \alpha$, $c \cap d$, $a \cap c$, $b \subset \alpha$, $a \cap d$, $b \cap d$, $c \subset \alpha$, $d \subset \alpha$ (рис. 11).

Решение:

1. $a \subset \alpha \Rightarrow \{O, B\} \in \alpha$; $b \subset \alpha \Rightarrow \{O, B\} \in \alpha$; $c \subset \alpha \Rightarrow \{A, D, B\} \in \alpha$.
2. $D \in \alpha, O \in \alpha, D \in d, O \in d \Rightarrow d \subset \alpha$.

(*Ответ*: Да.)

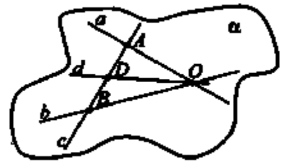


Рис. 11

№ 3. *Дано*: $ABCD$ – четырехугольник (рис. 12), $C \in \alpha$, $A \notin \alpha$, $B \notin \alpha$, $D \notin \alpha$, $AB \cap \alpha = B_1$, $AD \cap \alpha = D_1$.

Каково взаимное расположение точек C, B_1, D_1 – ?

Решение:

1. $AD \cap A = A \Rightarrow \beta$.
2. $\left.\begin{matrix} D_1 \in \alpha, D_1 \in \beta \\ B_1 \in \alpha, B_1 \in \beta \end{matrix}\right| \Rightarrow B_1D_1 \subset \alpha$ и $B_1D_1 \subset \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha \cap \beta = B_1D_1$.

3. $C \in \alpha, C \in \beta \Rightarrow C \in B_1D_1$ (по аксиоме A_3).

(*Ответ*: точки $B_1Д_1$ и C лежат на одной прямой.)

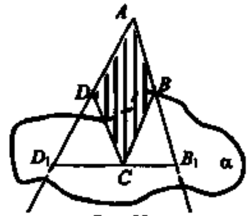


Рис. 12

Вариант II

№ 2. *Дано*: $\alpha \neq \beta \neq \gamma$, $A \in \alpha$, $A \in \beta$, $A \in \gamma$ (рис. 13).

Верно ли, что данные плоскости имеют общую прямую?

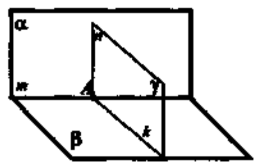


Рис. 13

Решение:

1. $A \in \alpha, A \in \beta \Rightarrow$ (аксиома A_3) $\alpha \cap \beta = m$ $(A \in m)$.
2. $A \in \alpha, A \in \gamma \Rightarrow$ (аксиома A_3) (аксиома A_3) $= n$ $(A \in n)$.
3. $A \in \beta, A \in \gamma \Rightarrow$ (аксиома A_3) (аксиома A_3) $= k$ $(A \in k)$, $n \neq m \neq k$.

(*Ответ*: Нет.)

№ 3. *Дано*: $D \notin \alpha$, $a \cap \alpha = A$, $b \cap \alpha = B$, $D \in a$, $D \in b$, $D \notin c$, $C \cap \alpha = C$, $c \cap a$, $c \cap b$ (рис. 14).

Каково взаимное расположение точек A, B, C – ?

Решение:

1. $a \cap b = D \Rightarrow \beta$.
2. $\left.\begin{matrix} K \in a \Rightarrow K \in \beta \\ N \in b \Rightarrow N \in \beta \end{matrix}\right| \Rightarrow$ (аксиома A_2) $KN \subset \beta$.

(или $c \subset \beta$).

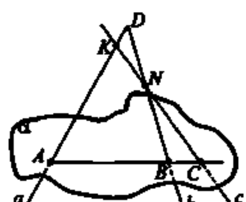


Рис. 14

3. $\left.\begin{matrix} A \in \alpha, A \in \beta \\ B \in \alpha, B \in \beta \end{matrix}\right| \Rightarrow AB \subset \alpha$ и $AB \subset \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = AB$.
4. $C \in \alpha, C \in \beta \Rightarrow$ (аксиома A_3) $C \in AB$.

(*Ответ*: точки A, B и C лежат на одной прямой.)

Глава I

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

§ 1. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ, ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

(уроки 6–10)

Урок 6. Параллельные прямые в пространстве

Цели урока:

1) рассмотреть взаимное расположение 2-х прямых в пространстве. Ввести понятие параллельных и скрещивающихся прямых;
2) доказать теоремы о параллельности прямых и параллельности 3-х прямых;
3) закрепить эти понятия на моделях куба, призмы, пирамиды.

Ход урока

I. Организационный момент

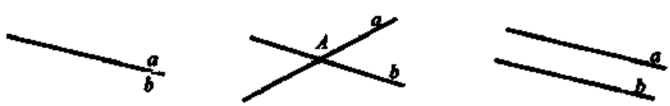
Сообщить тему урока, сформулировать его цели.

II. Вспомнить материал из планиметрии о параллельности прямых (повторение)

1) Определение параллельных прямых;
2) Взаимное расположение 2-х прямых на плоскости (либо пересекаются, либо параллельны);
3) Как через точку A, заданную вне данной прямой a, провести прямую, параллельную a?
4) Сколько таких параллельных (к a через A) можно провести? Почему? (только одну, по аксиоме параллельных);
5) Аксиома параллельных (подчеркнуть, что через точку A вне прямой a можно провести единственную прямую, параллельную a).

III. Изучение нового материала

1) Каково расположение 2-х прямых на плоскости (совпадают, пересекаются, параллельны) (рис. 1 *а, б, в*).



а) $a = b$ *б)* $a \cap b = A$ *в)* $a \parallel b$

Рис. 1

2) Перейдем к взаимному расположению 2-х прямых в пространстве. Как и в планиметрии, две различные прямые в пространстве либо пересекаются в одной точке, либо не пересекаются (не имеют общих точек). Однако второй случай допускает две возможности: прямые лежат в одной плоскости (параллельны) или прямые не лежат в одной плоскости. В первом случае они параллельны, а во втором – такие прямые называются скрещивающимися.

Даем определение. Сопровождаем показ параллельности, пересечения, скрещивания прямых хотя бы на модели куба, параллелепипеда, пирамиды (рисунки с обозначениями).

Определение: Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

3) Докажем теорему о параллельных прямых.

Теорема:

Дано: A; $A \in a$. Провести через A прямую $b \parallel a$, доказать ее единственность (рис. 2).

Доказательство:

По условию даны прямая a и не лежащая на ней точка A. По ранее доказанной теореме через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну. Проведем плоскость α. Теперь в плоскости α через току A проведем прямую $b \parallel a$, а из планиметрии известно, что через точку A вне прямой a можно провести прямую, параллельную данной, и притом только одну. Теорема доказана.

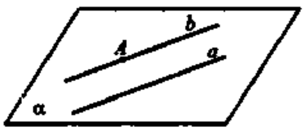


Рис. 2

В дальнейшем нам понадобятся такие понятия: два отрезка называются параллельными, если они лежат на параллельных прямых, аналогично определяются параллельность отрезка и прямой, параллельность двух лучей.

Докажем лемму о пересечении плоскости параллельными прямыми, которой будем пользоваться в дальнейшем.

Лемма: $a \parallel b$; α; $a \cap \alpha = A$ (рис. 3).

Доказать, что $b \cap \alpha$.

Доказательство:

1. $a \parallel b$ определяют плоскость β.
2. Получили, что α и β имеют общую точку A, по аксиоме A_3 $\alpha \cap \beta = m$. $m \subset \beta$, $m \subset a = A$, поэтому $m \subset b = B$, $b \parallel a$, $m \subset \alpha$, поэтому $B \in \alpha$ следовательно, $B \in b$, $b \in \alpha$.

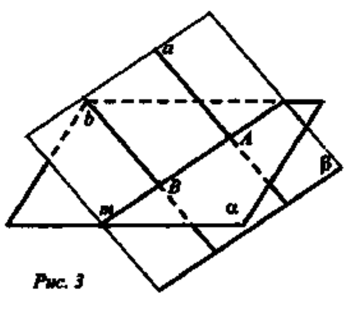


Рис. 3

Докажем, что прямая b не имеет других общих точек с плоскостью α, кроме точки B. А это означало бы, что $b \subset \alpha$.

Если бы прямая b имела еще хотя бы одну общую точку с плоскостью α, то она целиком бы лежала в плоскости α, а это значит, что она была бы общей прямой плоскости α и плоскости β, то есть $b \equiv m$, но это невозможно, так как по условию $a \parallel b$, и $a \subset m$. Значит, $b \subset \alpha = B$. *Лемма доказана.*

4) Из планиметрии известно:

Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

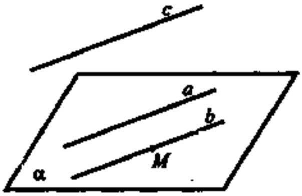


Рис. 4

Аналогичное утверждение имеет место и для 3-х прямых в пространстве.

Теорема: *Дано*: $a \parallel c$; $b \parallel c$ (рис. 4).

Доказать, что $a \parallel b$, то есть 1) лежат в одной плоскости; 2) не пересекаются.

Доказательство: 1) Возьмем на прямой b точку M и через a и M проведем плоскость α. Докажем, что $b \subset \alpha$.

Если допустить, что $b \cap \alpha$, то по лемме о пересечении плоскости параллельными прямыми прямая $c \cap \alpha$, но $a \parallel c$, значит, $a \cap \alpha$, что невозможно, так как $a \subset \alpha$.

2) Прямая $a \cap b$, так как в противоположном случае через точку их пересечения проходили бы две прямые (a и b), параллельные c, что невозможно. И значит, $a \parallel b$ и *теорема доказана.*

IV. Закрепление изученного материала

Задача № 17

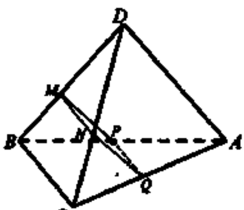


Рис. 5

Дано: M – середина BD; N – середина CD; Q – середина AC; P – середина AB; $AD = 12$ см; $BC = 14$ см (рис. 5).

Найти: P_{MNQP} – ?

Решение:

1. $MN \parallel BC$ по составу средней линии $\Rightarrow$ $\Rightarrow MN \parallel PQ$; $PQ \parallel BC$.
2. $PM \parallel AD$ по составу средней линии $\Rightarrow$ $\Rightarrow PM \parallel QN$; $NQ \parallel DA$.
3. По определению $MNQP$ – параллелограмм.
4. $PQ = 7$; $PM = 6 \Rightarrow P_{MNQP} = 2\,(7 + 6) = 26$.

(*Ответ*: 26 см.)

V. Подведение итогов

Домашнее задание

П. 4,5, теоремы.

Задача № 16

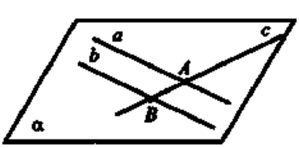


Рис. 6

Дано: $a \parallel b$; $a \subset \alpha$; $b \subset \alpha$; $c \parallel a = A$; $c \cap b = B$ (рис. 6).

Доказать: $c \subset \alpha$.

Доказательство: По условию $a \cap c = A$; $b \cap c = B$, значит $A \in \alpha$ и $B \in \alpha$, так как $a \subset \alpha$ и $b \subset \alpha$, по A_2 $c \subset \alpha$, что и требовалось доказать.

Урок 7. Параллельность прямой и плоскости

Цели урока:

1) рассмотреть возможные случаи взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве.

2) ввести понятие параллельности прямой и плоскости.
3) доказать признак параллельности прямой и плоскости.

Ход урока

I. Организационный момент

Проверить у доски решение заадчи № 16.

Сообщить тему урока, сформулировать его цели.

II. Объяснение нового материала начать с рассмотрения взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве

В каком случае прямая и плоскость параллельны (рис. 1. *а, б, в*)? Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.

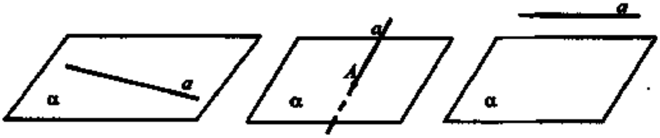


Рис. 1

Показать на предметах обстановки классной комнаты прямые, параллельные плоскости пола.

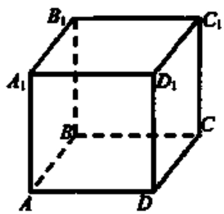


Рис. 2

На модели куба (рис. 2) укажите плоскости, параллельные прямой DC, прямой DD_1. Как установить параллельнось прямой и плоскости?

Обратите внимание на модель куба. $DC \parallel (AA_1B_1)$. В плоскости (AA_1B_1) имеется прямая $AB \parallel DC$; $DC \parallel (A_1B_1C_1)$. В плоскости $(A_1B_1C_1)$ имеется прямая $D_1C_1 \parallel DC$. Сделайте предположение. Наличие в плоскости α прямой $b \parallel a$ является признаком, по которому можно сделать вывод о параллельности прямой a и плоскости α.

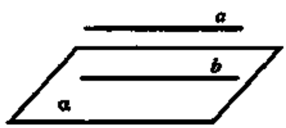


Рис. 3

Теорема:

Дано: a, α; $a \notin \alpha$; $b \in \alpha$; $a \parallel b$ (рис. 3).

Доказать, что $a \parallel \alpha$.

Доказательство: По условию $b \in \alpha$; $b \parallel a$. Предположим, что $a \cap \alpha$, тогда по лемме о пересечении плоскости параллельными прямыми прямая $b \cap \alpha$, но это невозможно, так как $b \in \alpha$. Следовательно, $a \cap \alpha$, поэтому $a \parallel \alpha$ и *теорема доказана*.

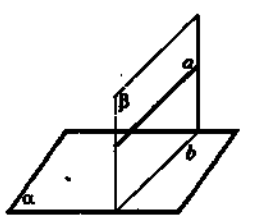


Рис. 4

Докажем два утверждения, которыми будем пользоваться при решении задач.

1. Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

Дано: a, α, β; $a \parallel \alpha$; $\beta \cap \alpha = b$ (рис. 4).

Доказать: $a \parallel b$.

Доказательство: По условию $a \in \beta$; $b \in \beta$; $b \in \alpha$, $a \parallel \alpha$, значит, $a \parallel b$, так как $a \parallel \alpha$ и $a \parallel b$.

2. Если одна из 2-х параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая либо также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости.

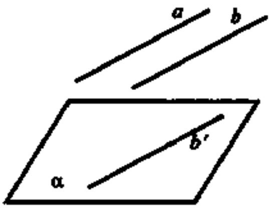


Рис. 5

Дано: $a \parallel b$; α; $a \parallel \alpha$ (рис. 5).

Доказать: 1) $b \parallel \alpha$. 2) $b \in \alpha$.

Доказательство: По условию $a \parallel b$ и $a \parallel \alpha$, следовательно, по лемме о пересечении плоскости параллельными прямыми $b \not\cap \alpha$, то есть $b \parallel \alpha$ или $b \in \alpha$.

III. Закрепление изученного материала

Задача № 186

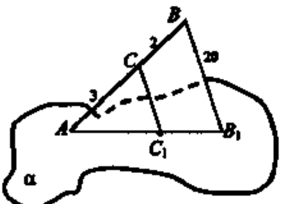


Рис. 6

Дано: AB_1, α; $A \in \alpha$; $BB_1 \parallel CC_1$; $B_1 \in \alpha$; $C_1 \in \alpha$; $AC : CB = 3 : 2$; $BB_1 = 20$ см (рис. 6).

Найти: CC_1.

Решение:

1. Докажем, что точки A, C_1, B_1 лежат на одной прямой. Точка A и BB_1 определяют плоскость β. $\beta \in \alpha = AB_1$.

Докажем, что $C_1 \in AB_1$. Пусть $C_1 \notin \beta$, тогда

$CC_1 \cap \beta = C$. $\left.\begin{matrix} CC_1 \parallel BB_1 \\ CC_1 \cap \beta \end{matrix}\right| \Rightarrow BB_1 \cap \beta$, что противоречит $BB_1 \in \beta$.

$CC_1 \cap \beta$. Следовательно, $C_1 \in AB_1$.

2. Так как $BB_1 \parallel CC_1$, то $\Delta ACC_1 \sim \Delta ABB_1$, тогда $AC : AB = CC_1 : BB_1$; $3 : 5 = CC_1 : 20$; $CC_1 = \dfrac{3 \cdot 20}{5} = 12$.

(*Ответ*: 12 см.)

Задача № 20

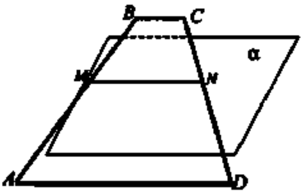


Рис. 7

Дано: α, $ABCD$ – трапеция, MN – средняя линия; $MN \in \alpha$ (рис. 7).

Доказать: Пересекает ли BC и AD плоскость α.

Доказательство: 1. Пусть $BC \cap \alpha$, тогда $\left.\begin{matrix} BC \cap \alpha \\ BC \parallel MN \end{matrix}\right| \Rightarrow MN \cap \alpha$; Получили противоречие, так как $MN \in \alpha \Rightarrow BC \not\cap \alpha$.

Аналогично доказывается, что $AD \not\cap \alpha$.

IV. Подведение итогов

Домашнее задание

П. 6, № 18 (а), 19, 21.

Задача № 18а

Дано: $A \in \alpha$; $CC_1 \parallel BB_1$; $AC = CB$, $BB_1 = 7$ см.

Найти: CC_1.

Решение:

Доказательство того, что $C_1 \in AB_1$ дано в 18(б). Так как C – середина AB, то CC_1 – средняя линия $\Delta ABB_1 \Rightarrow CC_1 = 3{,}5$. (*Ответ*: 3,5 см.)

Задача № 19

Дано: $ABCD$ – параллелограмм; $AB \cap \alpha = K$; $BC \cap \alpha = M$ (рис. 8).

Доказать, что $AD \cap \alpha$; $DC \cap \alpha$.

Доказательство: $\left.\begin{matrix} AB \cap \alpha \\ AB \parallel DC \end{matrix}\right| \Rightarrow$ по лемме $DC \cap \alpha$. Аналогично $AD \cap \alpha$.

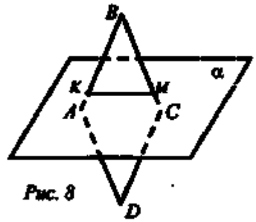


Рис. 8

Задача № 21

Дано: ΔABC и ΔABD не лежат в одной плоскости; $MN \parallel CD$ (рис. 9).

Доказать: $MN \cap (ABC)$; $MN \cap (ABD)$.

Доказательство:

$\left.\begin{matrix} D \in BD \\ C \in ABC \end{matrix}\right| \Rightarrow DC \cap ABD$ и $DC \cap ABC$, $MN \parallel DC$, $C \in ABC$. Следовательно, по лемме $MN \cap ABD$ и $MN \cap ABC$. Что и требовалось доказать.

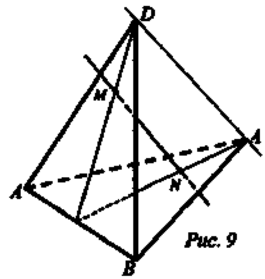


Рис. 9

Урок 8. Решение задач по теме «Параллельность прямой и плоскости»

Цели урока:

1) закрепить теоретический материал;
2) закрепить навык применения изученных теорем при решении задач;
3) воспитывать интерес к геометрии.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему и цели урока.

II. Проверка домашнего задания

Решение задач № 19, 21 подготовить на доске (2 ученика).

Решение задачи № 18(а) – один из учащихся комментирует решение.

III. Актуализация знаний учащихся. Подготовить у доски доказательство теорем:

1 – о параллельных прямых;

2 – о параллельности трех прямых;

3 – о параллельности прямой и плоскости.

Фронтальный опрос

1) Какие прямые в пространстве называются параллельными?
2) Всегда ли через две параллельные прямые можно провести плоскость? А через две пересекающиеся прямые? (Да, да.)
3) В пространстве дано число n параллельных между собой прямых. Известно, что никакие три из них не лежат в одной плоскости. Сколько различных плоскостей можно провести через эти прямые? (Число n плоскостей.)
4) Сформулируйте лемму о пересечении плоскости параллельными прямыми.
5) Каково может быть взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве?
6) В каком случае прямая параллельна плоскости?

IV. Решение задач

1) Решение у доски с записью в тетрадях

Задача № 22

Дано: $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \alpha$; $AM = MC$; $BN = NC$.

Доказать: $MN \parallel \alpha$.

Доказательство: $MN \parallel AB$ (по свойству средней линии), $AB \in \alpha$; $MN \parallel \alpha$ по признаку.

Перед решением задачи № 26 дать понятие отрезка, параллельного плоскости.

«Отрезок параллелен плоскости, если прямая, содержащая этот отрезок, параллельна плоскости».

Задача № 26

Дано: $AC \parallel \alpha$, $AB \cap \alpha = M$; $CB \cap \alpha = N$ (рис. 1).

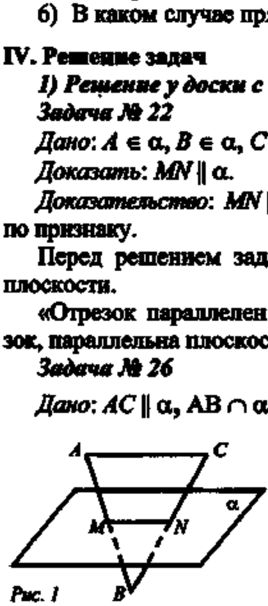


Рис. 1

Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta MBN$.

Доказательство:

1. Докажем, что $AC \parallel MN$;

$$\left.\begin{array}{l} AC \parallel \alpha \\ MN \in \alpha \end{array}\right| \Rightarrow AC \not\cap MN;$$

$$\left.\begin{array}{l} AC \in (ABC) \\ MN \in (ABC) \\ AC \not\cap MN \end{array}\right| \Rightarrow AC \parallel MN \text{ (по определению).}$$

2. Так как $AC \parallel MN \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta MBN$.

2) Самостоятельное решение задач по уровням

I уровень

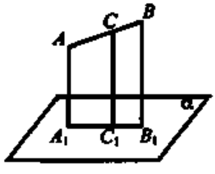


Рис. 2

Отрезок AB не пересекает плоскость α. Через середину отрезка C и концы отрезка A и B проведены прямые, параллельные между собой и пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1, C_1.

Вычислить длину отрезка CC_1, если $AA_1 = 5$, $BB_1 = 7$.

Дано: $AB \not\cap \alpha$, $AC = CB$; $AA_1 \parallel CC_1 \parallel BB_1$;

$AA_1 = 5$ см, $BB_1 = 7$ см (рис. 2).

Найти: CC_1.

Решение:

1. Докажем, что A_1, C_1 и B_1 лежат на одной прямой. $(AA_1, BB_1) = \beta$, $\beta \cap \alpha = A_1B_1$. Докажем, что $C_1 \in A_1B_1$.
2. Пусть $C_1 \notin A_1B_1$, тогда $CC_1 \cap \beta = c$, c – прямая пересечения; $\left.\begin{matrix} CC_1 \cap \beta \\ CC_1 \parallel AA_1 \end{matrix}\right| \Rightarrow$ по лемме $AA_1 \cap \beta$. Получили противоречие, значит, $C_1 \in A_1B_1$.
3. Так как $A_1A \parallel BB_1$, значит, A_1ABB_1 – трапеция, CC_1 – средняя линия $\Rightarrow CC_1 = \dfrac{AA_1 + BB_1}{2}$; $CC_1 = \dfrac{5+7}{2} = 6$.

(*Ответ*: 6 см.)

II уровень

Точка M лежит на отрезке AB. Отрезок AB пересекается с плоскостью α в точке B. Через A и M проведены параллельные прямые, пересекающие α в точках A_1 и M_1.

а) *Докажите*, что A_1, M_1 и B лежат на одной прямой.

б) *Найдите* длину отрезка AB, если $AA_1 : MM_1 == 3 : 2$, $AM = 6$.

Дано: $AB \cap \alpha = B$, $M \in AB$; M_1, $A_1 \in \alpha$, $AA_1 \parallel MM_1$; $AA_1 : MM_1 = 3 : 2$. $AM = 6$ (рис. 3).

Докажите: $M_1 \in A_1$B.

Найдите: $AM = 6$.

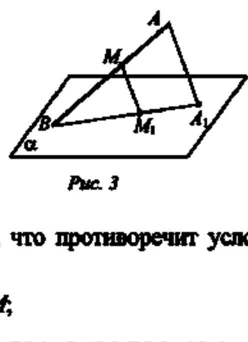


Рис. 3

Решение:

1. $(AA_1B) \cap \alpha = A_1B$. Предположим, $M_1 \notin A_1B$, тогда $MM_1 \cap (AA_1B) = C$, значит, $MM_1 \nparallel AA_1$, что противоречит условию.
2. $\Delta AA_1B \sim \Delta MM_1B (AA_1 \parallel MM_1)$; $AB = BM + AM$; $\dfrac{AA_1}{MM_1} = \dfrac{AB}{BM} = \dfrac{BA_1}{BM_1}$; $\dfrac{AA_1}{MM_1} = \dfrac{BM + AM}{BM} = \dfrac{3}{2}$; $BM = 2AM$, $BM = 12$ (см).

(*Ответ*: 12 см.)

V. Подведение итогов

Домашнее задание

I уровень: № 24, 28.

II уровень: № 31, дополнительная задача № 1.

I уровень

Задача № 24

Дано: ABCD – трапеция $M \notin (ABC)$ (рис. 4).

Доказать: $AD \parallel (BMC)$.

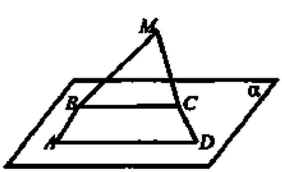


Рис. 4

Доказательство: $AD \parallel BC$ (по определению трапеции); $BC \in (BMC)$, значит $AD \parallel (BMC)$ по признаку.

Задача № 28

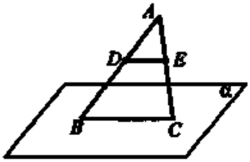


Рис. 5

Дано: $D \in AB$, $E \in AC$, $DE = 5$; $\dfrac{BD}{DA} = \dfrac{2}{5}$, $BC \in \alpha$, $DE \parallel \alpha$ (рис. 5).

Найдите: BC.

Решение:

1) $\left.\begin{matrix} DE \parallel \alpha \\ BC \in \alpha \end{matrix}\right| \Rightarrow DE \not\cap BC.$

2) $\left.\begin{matrix} BC \in (ABC) \\ DE \in (ABC) \\ DE \not\cap BC \end{matrix}\right| \Rightarrow DE \parallel BC$ по определению.

3) $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ (по двум углам)

$\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{DE}{BC}$; $\dfrac{3}{5} = \dfrac{5}{BC}$; $BC = \dfrac{25}{3}$; $BC = 8\dfrac{1}{3}$.

(*Ответ*: $8\dfrac{1}{3}$.)

II уровень

Задача № 31

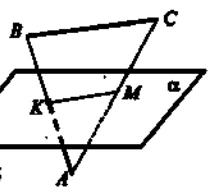


Рис. 6

Дано: $\alpha \parallel BC$, $AK = BK$, $K \in \alpha$ (рис. 6).

Доказать: $\alpha \cap AC = M$; $AM = CM$.

Доказательство:

1. $\left.\begin{matrix} BC \parallel \alpha \\ (ABC) \cap \alpha = KM \end{matrix}\right| \Rightarrow KM \parallel BC.$

2. $\left.\begin{matrix} KM \parallel BC \\ AK = BK \end{matrix}\right| \Rightarrow AM = CM.$

Дополнительная задача

Дан Δ MKP. Плоскость, параллельная прямой MK, пересекает MP в точке M_1, PK – в точке K_1. Найдите M_1K_1, если $MP : M_1P = 12 : 5$, $MK = 18$ см.

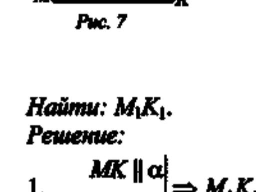


Рис. 7

Дано: ΔMPK, $MK \parallel \alpha$, $MP \cap \alpha = M_1$, $PK \cap \alpha = K_1$, $MP : M_1P = 12 : 5$; $MK = 18$ см (рис. 7).

Найти: M_1K_1.

Решение:

1. $\left.\begin{matrix} MK \parallel \alpha \\ M_1K_1 \in \alpha \end{matrix}\right| \Rightarrow M_1K_1 \parallel MK.$

2. $\Delta MPK \sim \Delta M_1PK_1$ (по двум углам).

$\dfrac{MP}{M_1P} = \dfrac{MK}{M_1K_1}$; $M_1K_1 = \dfrac{M_1P \cdot MK}{MP}$; $M_1K_1 = \dfrac{5 \cdot 18}{12}$; $M_1K_1 = 7{,}5$.

(*Ответ*: 7,5 см.)

Урок 9. Решение задач по теме: «Параллельность прямой и плоскости»

Цели урока:

1) обобщить изученный материал;
2) закрепить навыки применения изученных теорем к решению задач;
3) воспитывать самостоятельность в выборе способа решения геометрических задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему и цели урока.

II. Проверка домашнего задания

Проверить задачи № 24, 31, комментируя решение.

III. Актуализация знаний учащихся

1) Фронтальный опрос.
   - Сформулируйте теорему о трех параллельных прямых.
   - Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости.
   - Верно ли утверждение, что если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна ей, то она параллельна любой прямой, лежащей в этой плоскости? (Нет.)
   - Верно ли утверждение, что если две прямые параллельны одной и той же плоскости, то они параллельны между собой? (Нет.)
   - Каким может быть взаимное расположение двух прямых, из которых одна параллельна некоторой плоскости, а другая пересекает эту плоскость?
2) Индивидуальная работа по карточкам (3 ученика).

С остальными учениками решение задач № 29, 30.

I уровень

Карточка 3

Через основание AD трапеции $ABCD$ проведена плоскость α. $BC \notin \alpha$. Докажите, что прямая, проходящая через середины сторон AB и CD, параллельна плоскости α.

Дано: $ABCD$ – трапеция; $AD \in \alpha$, $CB \notin \alpha$; $AK = KB$, $CN = ND$ (рис. 3).

Доказать: $KN \parallel \alpha$.

Доказательство:

1. KN – средняя линия трапеции, значит $KN \parallel AD$.
2. $\left.\begin{array}{l} KN \parallel AD \\ AD \in \alpha \end{array}\right| \Rightarrow KN \parallel \alpha$ (по теореме о параллельности прямой и плоскости).

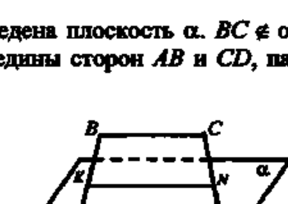


Рис. 3

II уровень

Карточка 2

Дан ΔBCE. Плоскость, параллельная прямой CE, пересекает BE в точке E_1, а BC – в точке C_1. Найдите BC_1, если $C_1E_1 : CE = 3 : 8$, $BC = 28$ см.

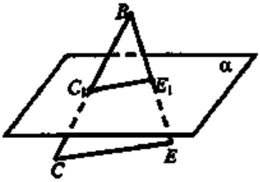


Рис. 2

Дано: ΔBCE, $\alpha \parallel CE$, $BE \cap \alpha = E_1$; $BC \cap \alpha = C_1$; $C_1E_1 : CE = 3 : 8$, $BC = 28$ см. (рис. 2).

Найти: BC_1

Решение:

1. $\left.\begin{matrix} C_1E_1 \in \alpha \\ CE \parallel \alpha \end{matrix}\right| \Rightarrow C_1E_1 \parallel CE.$

2. $\Delta BC_1E_1 \sim \Delta BCE$ (по двум углам); $\dfrac{BC_1}{BC} = \dfrac{C_1E_1}{CE}$; $BC_1 = \dfrac{BC \cdot C_1E_1}{CE}$; $BC_1 = \dfrac{28 \cdot 3}{8}$; $BC_1 = \dfrac{21}{2} = 10{,}5$. (*Ответ*: 10,5 см.)

III уровень

Карточка 1

№ 1. Доказать, что если через каждую их двух параллельных прямых проведена плоскость, причем эти плоскости пересекаются, то линия их пересечения параллельна каждой из данных прямых.

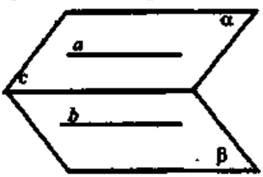


Рис. 1

Дано: $a \parallel b$, $a \in \alpha$, $b \in \beta$, $\alpha \cap \beta = c$ (рис. 1).

Доказать: $a \parallel c$, $b \parallel c$.

Доказательство:

1. $\left.\begin{matrix} a \parallel b \\ b \in \beta \end{matrix}\right| \Rightarrow a \parallel \beta$ по признаку.

2. $\left.\begin{matrix} a \parallel b \\ b \in \beta \\ \alpha \cap \beta \end{matrix}\right| \Rightarrow a \parallel c.$

3. Аналогично $b \parallel c$.

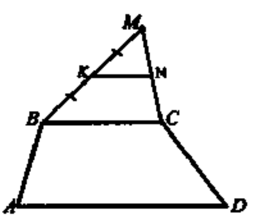


Рис. 4

№ 29. *Дано:* $ABCD$ – трапеция, $BC = 12$ см, $M \in (ABC)$, $BK = KM$ (рис. 4).

Доказать: $(ADK) \cap MC = H$.

Найти: KH.

Решение:

1. $\left.\begin{matrix} AD \parallel BC \\ BC \in (BMC) \end{matrix}\right| \Rightarrow AD \parallel (BMC).$

2. $\left.\begin{matrix} AD \parallel (BMC) \\ AD \in (AKD) \\ (BMC) \cap (AKD) = KH \end{matrix}\right| \Rightarrow AD \parallel KH.$

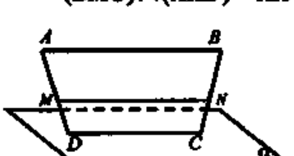


Рис. 5

3. $AD \parallel BC$, $AD \parallel KH \Rightarrow KH \parallel BC$.

4. $BK = KH$, $KH \parallel BC \Rightarrow CH = HM$, следовательно KH – средняя линия ΔBMC. $KH = 6$ см.

№ 30. *Дано:* $ABCD$ – трапеция, $AB \parallel \alpha$, $C \in \alpha$ (рис. 5).

Доказать: $CD \cap \alpha$; $MN \parallel \alpha$, где MN – средняя линия трапеции.

Доказательство:

1. Пусть $CD \notin \alpha$, тогда $CD \cap \alpha = C$,

$\left.\begin{array}{l} CD \cap \alpha \\ AB \cap CD \end{array}\right| \Rightarrow$ по лемме $AB \cap \alpha$. Но $AB \parallel \alpha$ – это противоречие, значит, $CD \in \alpha$.

2. $\left.\begin{array}{l} MN \parallel DC \\ CD \in \alpha \end{array}\right| \Rightarrow$ (по признаку).

V. Самостоятельная работа обучающего характера (с оказанием индивидуальной дифференцируемой помощи) (см. приложение)

Ответы и указания к задачам самостоятельной работы

I уровень

Вариант I

1. 1) $\left.\begin{array}{l} AK = KB \\ BM = MC \\ KM \parallel AC, KM = 1/2\,AC \end{array}\right| \Rightarrow$ KM – средняя линия.

2) $\left.\begin{array}{l} KM \parallel AC \\ AC \parallel EF \end{array}\right| \Rightarrow KM \parallel EF$ (теорема о параллельности трех прямых).

3) $AC = CF = EF = AE = 8$; $KM = \dfrac{1}{2}AE$; $KM = 4$.

(*Ответ*: 4 см.)

2. *Дано:* $ABCD$ – трапеция; $AD \in \alpha$, $AE = EB$, $CF = FD$ (рис. 8).

Доказать: $EF \parallel \alpha$.

Доказательство: Так как $AE = EB$, $CF = FD$, значит, EF – средняя линия трапеции $ABCD$.

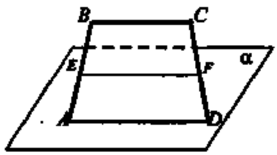


Рис. 8

$\left.\begin{array}{l} EF \parallel AD, EF \parallel \alpha \\ AD \in \alpha \end{array}\right|$ (по теореме о параллельности прямой и плоскости)

Вариант II

1. *Решение:*

1) $\left.\begin{array}{l} KA = AM \\ ND = DL \end{array}\right| \Rightarrow$ AD – средняя линия трапеции $AD \parallel KL$, $AD = \dfrac{1}{2}(MN + KL)$.

2) ABCD – квадрат, $AB = BC = CD = DA$, $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.

3) $\left.\begin{array}{l} AD \parallel KL \\ AD \parallel BC \end{array}\right| \Rightarrow KL \parallel BC$.

4) $BC = AD = \dfrac{1}{2}(MN + KL)$, $BC = \dfrac{1}{2}(10 + 6)$, $BC = 8$ (см).

(*Ответ*: 8 см.)

2. *Дано*: ΔABC, $AC \in \alpha$, $AD = DB$, $BE = EC$ (рис. 9).

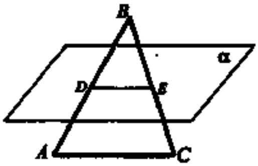


Рис. 9

Доказать: $DE \parallel \alpha$.

Доказательство:

1) Так как $\left.\begin{matrix} AD = DB \\ BE = EC \end{matrix}\right| \Rightarrow DE$ – средняя линия ΔABC.

2) $\left.\begin{matrix} DE \parallel AC \\ AC \in \alpha \end{matrix}\right| \Rightarrow DE \parallel \alpha$ (по признаку).

II уровень

Вариант I

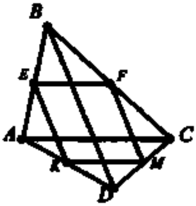


Рис. 10

1. *Дано:* A, B, C, D; $B \notin (ACD)$. E, F, M, K – середины сторон AB, BC, CD, AD; $AC = 6$ см, $BD = 8$ см (рис. 10).

Доказать: $EFMK$ – параллелограмм.

Найти: P_{EFMK}.

Решение:

1) ΔABC: $\left.\begin{matrix} AE = EB \\ BF = FC \end{matrix}\right| \Rightarrow EF$ – средняя линия, $EF \parallel AC, EF = \frac{1}{2}AC$.

2) ΔACD: $\left.\begin{matrix} AK = KD \\ CM = MD \end{matrix}\right| \Rightarrow$ KM – средняя линия, $MK \parallel AC$, $KM = \frac{1}{2}AC$. $EF \parallel AC$ (значит $EF \parallel (ACD)$), $AC \parallel KM \Rightarrow EF \parallel KM$ по теореме о параллельности прямой и плоскости.

3) Аналогично $EK \parallel FM$.

4) $EFMK$ – параллелограмм, то есть $EF \parallel KM, EK \parallel FM$.

5) Учитывая свойства параллелограмма $\left.\begin{matrix} EF = KM \\ EK = FM \end{matrix}\right| \Rightarrow P_{EFMK} = 2(EF + EK)$.

6) Из п. 1 и 2 следует, что $KM = EF = \frac{1}{2}AC$, $EF = \frac{1}{2}\cdot 6 = 3$.

7) $EK = FM = \frac{1}{2}BD$, $EK = \frac{1}{2}\cdot 8 = 4$.

8) $P_{EFMK} = 2\cdot(4+3) = 14$ (см).

(*Ответ*: 14 см.)

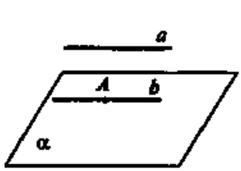


Рис. 11

2. *Дано:* $A \in \alpha$, $a \parallel \alpha$; $A \in b$, $b \parallel \alpha$ (рис. 11).

Доказать: $b \in \alpha$.

Доказательство:

$\left.\begin{matrix} a \parallel \alpha \\ b \parallel \alpha \end{matrix}\right|$, значит, $b \parallel \alpha$, но учитывая, что

$\left.\begin{matrix} A \in \alpha \\ A \in \beta \end{matrix}\right| \Rightarrow B \in \alpha$.

Вариант II

1. *Дано:* $A \notin (BCD)$; $AR = RD$, $AP = PB$, $BT = TC$, $DS = SC$; $BD = 6$ см, $P_{PRST} = 14$ см (рис. 12).
Доказать: PRST – параллелограмм.
Найти: AC.

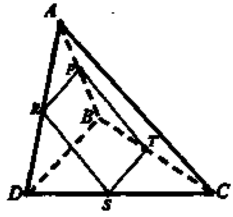


Рис. 12

Решение:

1) а) ΔABD: $\left.\begin{matrix} AR = RD \\ AP = PB \end{matrix}\right| \Rightarrow RP$ – средняя линия, $RP \parallel BD$, $RP = \frac{1}{2}BD$.

б) ΔABC: $\left.\begin{matrix} AP = BP \\ BT = TC \end{matrix}\right| \Rightarrow PT$ – средняя линия, $PT \parallel AC$, $PT = \frac{1}{2}AC$.

в) ΔADC: $\left.\begin{matrix} DR = RA \\ DS = SC \end{matrix}\right| \Rightarrow RS$ – средняя линия, $RS \parallel AC$, $RS = \frac{1}{2}AC$. Из *б* и *в* следует, что $PT \parallel RS$ (по теореме о параллельности трех прямых).

г) ΔBCD: $\left.\begin{matrix} BT = TC \\ CS = CD \end{matrix}\right| \Rightarrow TS$ – средняя линия, $TS \parallel BD$, $TS = \frac{1}{2}BD$. Из *а* и *д* следует, что $TS \parallel RP$ (по теореме о параллельности трех прямых). $TS = RP$.

2) $RP = TS = \frac{1}{2}BD$; $RP = TS = 3$ (см). $P_{RPTS} = 14$ см, $P_{RPTS} = 2RP = 2PT$,

$2PT = P_{RPTS} - 2RP$; $PT = \frac{14-6}{2} = 4$, $AC = 2PT$, $AC = 8$ (см).

(*Ответ*: 8 см.)

2. *Дано*: $a \parallel b$, $B \in b$, $B \in \alpha$, $a \parallel \alpha$ (рис. 13).
Доказать: $b \in \alpha$.

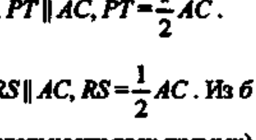


Рис. 13

Доказательство:

1) Допустим, $b \notin \alpha$, $b \cap \alpha = B$, по признаку, если $\left.\begin{matrix} a \parallel b \\ b \cap \alpha \end{matrix}\right| \Rightarrow a \cap \alpha$, что противоречит условию. Значит, $b \parallel \alpha$, но так как $\left.\begin{matrix} B \in b \\ B \in \alpha \end{matrix}\right| \Rightarrow b \in \alpha$.

III уровень

Вариант I

1. Дано: ΔABK, $M \notin (ABK)$; E, D – точки пересечения медиан ΔMBK и ΔABM; $AK = 14$ см (рис. 14).
Доказать: ADEK – трапеция.
Найти: DE.

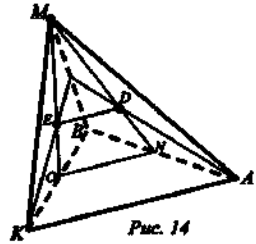


Рис. 14

Решение:

1) ΔABK: $\left.\begin{matrix} KO = OB \\ BN = NA \end{matrix}\right| \Rightarrow ON$ – средняя ли-

ния $ON \parallel AK$, $ON = \frac{1}{2}AK$.

2) Рассмотрим (MNO). $\Delta MON \in (MNO)$. Точки E и D – точки пересечения медиан: по свойству медиан $\frac{ME}{EO} = \frac{MD}{DN} = \frac{2}{13}$.

3) $\Delta MED \sim \Delta MON$ $\angle M$ – общий $\frac{ME}{MO} = \frac{MD}{MN} = \frac{2}{3}$, значит, $\angle MED = \angle MON$, то есть $ED \parallel ON$.

4) $\left.\begin{matrix} ON \in (ABK) \\ ED \parallel ON \end{matrix}\right| \Rightarrow ED \parallel (AKB)$ (по теореме о параллельности прямой и плоскости).

5) Из п. 1,3 $\left.\begin{matrix} ON \parallel AK \\ ON \parallel ED \end{matrix}\right| \Rightarrow AK \parallel ED$ по признаку, значит, $KEDA$ – трапеция, ED и AK – основания.

6) $ON = \frac{1}{2}AK$ (из п. 1), $ON = \frac{1}{2}\cdot 14 = 7$ (см).

7) Рассмотрим ΔMED и ΔMON, $\Delta MED \sim \Delta MON$ (из п. 3), значит, $\frac{ED}{ON} = \frac{ME}{MO} = \frac{MD}{MN} = \frac{2}{3}$; $\frac{ED}{ON} = \frac{2}{3}$; $ED = \frac{2\cdot ON}{3}$; $ED = \frac{2\cdot 7}{3} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$ (см).

(*Ответ*: $4\frac{2}{3}$ см.)

2. *Дано:* AA_1, BB_1, CC_1; O – середина отрезков (рис. 15).
Доказать: $AB \parallel (A_1C_1B_1)$.
Доказательство:

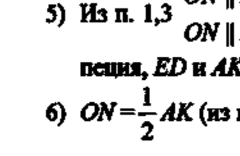


Рис. 15

1) Так как $AA_1 \cap BB_1 = 0$, существует $\alpha = (ABA_1B_1)$, α – единственна.
2) $AO = OA_1$, $BO = OB_1$, значит, ABA_1B_1 – параллелограмм, по свойству параллелограмма $AB \parallel A_1B_1$, $AB_1 \parallel A_1B$.
3) $A_1B_1 \in (A_1B_1C)$, $AB \notin (A_1B_1C)$ по теореме о параллельности прямой и плоскости.

Вариант II

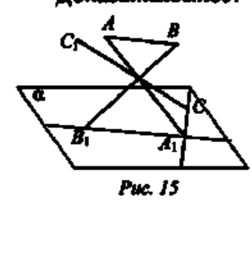


Рис. 16

1. *Дано:* A, B, C, D; $D \notin (ABC)$, K, M – точки пересечения медиан треугольников, ΔABD и ΔBCD, $KM = 6$ см (рис. 16).
Доказать: $KM \parallel AC$.
Найти: AC.
Решение:

1) ΔABC: $\left.\begin{matrix} AE = EB \\ BF = FC \end{matrix}\right| \Rightarrow EF$ – средняя линия $BF = FC$. $EF \parallel AC$, $EF = \frac{1}{2}$ AC.

2) Рассмотрим (EDF): $\Delta EDF \in (EDF)$, $\Delta KDM \sim \Delta EDF$, $\angle D$ – общий, $\frac{KD}{DE}=\frac{DM}{MF}=\frac{2}{3}$ (по свойству медиан треугольника $\frac{DK}{KE}=\frac{DM}{MF}=\frac{1}{2}$).

3) Из $\Delta KDM \sim \Delta EDF \Rightarrow \angle DKM = \angle DEF$, значит, $KM \parallel EF$. $\frac{KD}{DE}=\frac{M}{MF}=$

$$=\frac{KM}{EF}=\frac{2}{3};\quad \frac{KM}{EF}=\frac{2}{3};\quad EF=\frac{3\cdot KM}{2};\quad EF=\frac{3\cdot 6}{2}=9\ (\text{см}).$$

4) $\left.\begin{array}{l} KM \notin (ABC) \\ EF \in (ABC) \\ KM \parallel EF \\ EF \parallel AC \end{array}\right| \Rightarrow$ $KM \parallel AC$ по теореме о параллельности прямой и плоскости.

Из п. 1 $EF=\frac{1}{2}AC$; $AC=2EF$; $AC=18$ (см).

(*Ответ*: 18 см.)

2. *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм. O – точка пересечения диагоналей AC и BD; $(KM)\cap(ABCD)=O$; $KO=OM$ (рис. 17).

Доказать: $KB \parallel (AMD)$.

Доказательство:

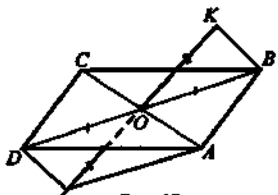


Рис. 17

1) Существует $(KBMD)$, так как $KM \cap BD$ плоскость $(KBMD)$ – единственная.
2) $BKDM$: $BO=OD$, $KO=OM$, значит $BKDM$ – параллелограмм, то есть по свойству параллелограмма $KB \parallel DM$.
3) $\left.\begin{array}{l} DM \in (ADM) \\ KB \notin (ADN) \\ KB \parallel DM \end{array}\right| \Rightarrow$ $KB \parallel (ADM)$ по теореме о параллельности прямой и плоскости.

VI. Подведение итогов

Домашнее задание

I уровень: № 23, № 25.

II уровень: № 23, 25, дополнительная задача № 88.

№ 23. *Дано:* $ABCD$ – прямоугольник; $M \notin (ABCD)$ (рис. 18).

Доказать: $CD \parallel (ABM)$.

Доказательство:

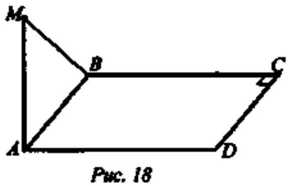


Рис. 18

$C \notin (ABM)$, $D \notin (ABM)$, так как $M \notin (ABCD)$, значит, $CD \cap (ABM)$ или $CD \parallel (ABM)$ – по признаку.

№ 25. *Дано:* $a \notin \alpha$, $a \notin \beta$; $\alpha \cap \beta = b$; $a \parallel b$ (рис. 19).

Доказать: $a \parallel \alpha$, $a \parallel \beta$.

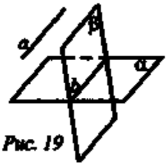


Рис. 19

Доказательство:

$$\left.\begin{array}{l} a \parallel b \\ b = \alpha \cap \beta \\ b \in \alpha, b \in \beta \end{array}\right| \Rightarrow a \parallel \alpha,\ a \parallel \beta \text{ по признаку.}$$

№ 88. *Дано:* $AC \parallel BD$, $AC \cap \alpha = A$; $BD \cap \alpha = B$. $AC = 8$ см, $BD = 6$ см, $AB = 4$ см (рис. 20).

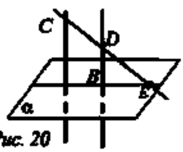


Рис. 20

Доказать: $CD \cap \alpha = E$.

Найти: BE.

Решение:

1) Проведем плоскость ($ACDB$), если $CD \parallel AB$, то $ACDB$ – параллелограмм, то есть $AC = BD$, но это противоречит условию, значит, $CD \cap AB = E$.
2) Рассмотрим ΔACE и ΔBDE.
$\angle CAE = \angle DBE$, $\angle ACE = \angle BDE$ – как соответственные при параллельных прямых, значит, $\Delta EDB \sim \Delta ECA$ (по 3 углам) следовательно, $\frac{EA}{EB} = \frac{EC}{ED}$, то есть $\frac{AE}{BE} = \frac{4}{3}$; $\frac{AE}{BE} = \frac{AB + BE}{BE} = \frac{AB}{BE} + 1 = \frac{4}{3}$; $AB = \frac{1}{3}BE$, $BE = 12$ (см).

(*Ответ*: BE=12 см.)

Урок 10. Решение задач по теме «Параллельность прямой и плоскости»

Цели урока:

1) обобщить материал изученного параграфа;
2) развивать навык применять изученные теоремы к решению задач;
3) воспитывать самостоятельность в выборе способа решения задач;
4) контроль знаний учащихся.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему и цели урока

II. Проверка домашнего задания

Проверка задач № 23, 25 устно, № 88 подготовить на доске.

III. Актуализация знаний учащихся

Устная работа.

1) Верно ли утверждение параллельности прямой и плоскости: «Прямая, параллельная какой-либо прямой на плоскости, параллельна и самой плоскости». (Нет, прямая может лежать в плоскости.)
2) Прямые a и b параллельны. Какое положение может занимать прямая *a* относительно плоскости, проходящей через прямую *b*? (*a* параллельна плоскости.)
3) Даны прямая и две пересекающиеся плоскости. Охарактеризовать все возможные случаи их взаимного расположения. (Прямая параллельна двум плоскостям, параллельна одной и пересекает другую, пересекает две плоскости.)

4) Одна из двух параллельных прямых параллельна некоторой плоскости. Можно ли утверждать, что и вторая прямая параллельна этой плоскости? (Да.)
5) Даны две пересекающиеся плоскости. Существует ли плоскость, пересекающая две данные плоскости по параллельным прямым? (Да.)
6) В плоскости α даны две пересекающиеся прямые a и b. Точка C не лежит в плоскости α. Каковы возможные случаи расположения прямой, проходящей через точку C, относительно прямых a и b? (Проходят через точку пересечения a и b.)

IV. Решение задач

№ 27. Дано: $[AB]$, $B \in \alpha$; $C \in [AB]$, $CD \parallel \alpha$; $\frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}$; $CD = 12$ см (рис. 1).

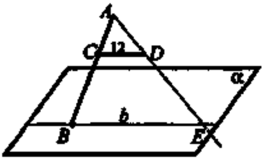


Рис. 1

Доказать: $AD \cap \alpha = E$.

Найти: BE.

Решение:

1. Проведем плоскость (ACD). $(ACD) \cap \alpha = b$; $CD \parallel b$; если $AD \not\cap \alpha \Rightarrow AD \parallel \alpha$, но получили противоречие, значит $AD \cap \alpha = E$.
2. $\Delta ADC \sim \Delta AEB$ (по трем углам); $\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BE} = \frac{AD}{AE}$; $\frac{AC}{AB} = \frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$;

$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BE}$; $\frac{CD}{BE} = \frac{1}{4}$; $BE = 4CD$; $BE = 48$ см.

(*Ответ*: 48 см.)

V. Проверочная самостоятельная работа

(см. приложение)

Ответы и указания к задачам самостоятельной работы

I уровень

Вариант I

1. *Дано:* ΔABC, $D \in AB$; $BD : BA = 1 : 3$; $\alpha \parallel AC$, $\alpha \cap BC = D_1$ $DD_1 = 4$ см (рис. 2).

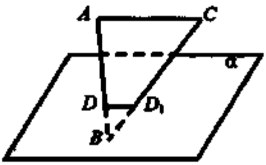


Рис. 2

Доказать: $\Delta DBD_1 \sim \Delta ABC$.

Найти: AC.

Решение:

1) $AC \parallel \alpha \Rightarrow AC \parallel DD_1$ – по признаку, значит, $\angle ACB = \angle DD_1B$, $\angle CAB = \angle D_1DB$, $\angle B$ – общий для ΔABC и ΔDBD_1. Следовательно, $\Delta DBD_1 \sim \Delta ABC$.
2) Из $\Delta ABC \sim \Delta DBD_1 \Rightarrow$

$\frac{BD}{BA} = \frac{BD_1}{BC} = \frac{DD_1}{AC} = \frac{1}{3}$; $\frac{DD_1}{AC} = \frac{1}{3}$;

$AC = 3DD_1$, $AC = 3 \cdot 4 = 12$ (см).

(*Ответ*: 12 см.)

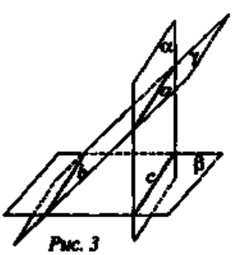


Рис. 3

2. *Дано:* $\alpha \cap \beta = c$; $c \parallel \gamma$; $\gamma \cap \alpha = a$; $\gamma \cap \beta = b$ (рис. 3).

Доказать: $a \parallel \beta$, $b \parallel \alpha$.

Доказательство:

1) $\left.\begin{array}{l}\gamma \parallel c \text{ и } \gamma \cap \alpha = a \Rightarrow a \parallel c \\ \gamma \parallel c \text{ и } \gamma \cap \beta = b \Rightarrow b \parallel c\end{array}\right| \Rightarrow a \parallel b$ по теореме о трех параллельных прямых $\left.\begin{array}{l} b \in \beta \\ a \parallel \beta \end{array}\right| \Rightarrow a \parallel \beta$.

2) Аналогично $b \parallel \alpha$.

Вариант II

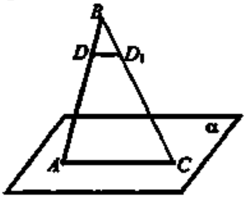


Рис. 4

1. *Дано:* $D \in [AB]$; $BD : BA = 1 : 4$; $A \in \alpha$, $DD_1 \parallel \alpha$; $BD_1 \cap \alpha = c$; $AC = 12$ см (рис. 4).

Доказать: $\Delta DBD_1 \sim \Delta ABC$.

Найти: DD_1.

Решение:

1) $DD_1 \parallel \alpha$ (по условию), $(ABC) \cap \alpha =$ $= AC$, $AC \in \alpha$, $DD_1 \parallel \alpha$, $DD_1 \parallel AC$ – по признаку.

2) $\Delta ABC \sim \Delta DBD_1$ (по трем углам), $\angle B$ – общий, $\angle BDD_1 = \angle BAC$, $\angle BD_1D = \angle BCA$. $\dfrac{BD}{BA} = \dfrac{BD_1}{BC} = \dfrac{DD_1}{AC} = \dfrac{1}{4}$; $\dfrac{DD_1}{AC} = \dfrac{1}{4}$; $DD_1 = \dfrac{AC}{4}$;

$DD_1 = \dfrac{12}{4} = 3$ (см).

(*Ответ*: 3 см.)

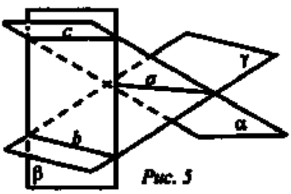


Рис. 5

2. *Дано:* $a \parallel b$; a, $b \in \gamma$; $a \in \alpha$, $b \in \beta$; $\alpha \cap \beta = c$ (рис. 5).

Доказать: $c \parallel \gamma$.

Доказательство:

1) Пусть $c \nparallel \gamma \Rightarrow c \cap \gamma$; $\left.\begin{array}{l} a \in \alpha \\ c \in \alpha \\ \alpha = \cap a \end{array}\right| \Rightarrow c \cap a$.

2) $\left.\begin{array}{l} c \in \beta \\ b \in \beta \\ \beta \cap \gamma = b \end{array}\right| \Rightarrow c \cap b$.

3) Из 1) и 2) следует $c \in \gamma$, чего быть не может.

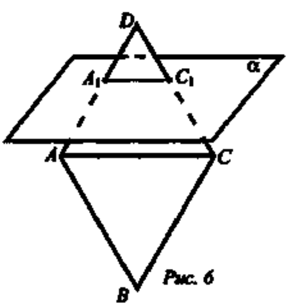


Рис. 6

II уровень

Вариант I

1. *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм; $A_1 \in AD$, $\alpha \parallel AC$, $C_1 = \alpha \cap CD$, $BC = 10$ см, $A_1C_1 = 6$ см, $DA_1 = 4$ см (рис. 6).

Доказать: $\Delta C_1DA_1 \sim \Delta ABC$.

Найти: AC.

Решение: 1) $(ADC) \cap \alpha = A_1C_1$ по утверждению $1° \Rightarrow A_1C_1 \parallel AC$.

2) Рассмотрим ΔADC, ΔA_1DC_1: AD – общий, $\angle DA_1C_1 = \angle DAC$, $\angle DC_1A_1 = \angle DCA$ – как соответствующие при параллельных прямых, значит $\Delta ADC \sim \Delta A_1DC_1$ (по трем углам).

3) Рассмотрим ΔABC и ΔACD. $AB = CD$, $BC = AD$ – по свойству параллелограмма, AC – общая, то есть $\Delta ABC = \Delta ACD$.
$$\left.\begin{matrix}\Delta ACD \quad \Delta A_1DC_1 \\ \Delta ACD = \Delta ABC\end{matrix}\right| \Rightarrow \Delta A_1DC_1 \sim \Delta ABC.$$

4) Из п. 2 $\Delta ADC \sim \Delta A_1DC_1$; $\dfrac{DA_1}{DA} = \dfrac{A_1C_1}{AC} = \dfrac{DC_1}{DC}$; $\dfrac{DA_1}{DA} = \dfrac{A_1C_1}{AC}$;
$$AC = \frac{DA \cdot A_1C_1}{DA_1};\ AC = \frac{10 \cdot 6}{4} = 15\ (\text{см}).$$

(*Ответ*: 15 см.)

2. *Дано:* $\alpha \cap \beta = b$; $\alpha \parallel a$, $\beta \parallel a$ (рис. 7).
Доказать: $a \parallel b$.
Доказательство:
1) Пусть $a \cap b$, тогда $M = a \cap \alpha$, $a \cap \beta = M$, но $a \parallel \alpha$ и $a \parallel \beta$, значит, получили противоречие, то есть $a \parallel \beta$.
$$\left.\begin{matrix} a \parallel \alpha \\ b \in \alpha \\ a \parallel \beta \\ b \in \beta \end{matrix}\right| \Rightarrow a \parallel b.$$

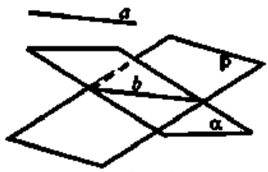


Рис. 7

Вариант II

1. *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм; $A_1 \in AB$, $A_1 \in \alpha$, $\alpha \parallel AC$; $\alpha \cap BC = C_1$; $BC_1 = 3$ см, $A_1C_1 = 4$см, $AC = 12$см (рис. 8).
Доказать: $\Delta ADC \sim \Delta A_1BC_1$.
Найти: AD.
Решение:

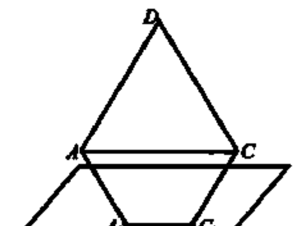


Рис. 8

1) $(ABCD) \cap \alpha = A_1C_1 \Rightarrow AC = A_1C_1$.
2) ΔABC и ΔA_1BC_1: $\angle$B – общий, $\angle ACB = \angle A_1C_1B$, $\angle CAB = \angle C_1A_1B$ соответствующие при $AC \parallel A_1C_1$, значит, $\Delta ABC \sim \Delta A_1BC_1$.
3) $\Delta ACD = \Delta ABC$: $AB = CD$, $BC = AD$ (по свойству параллелограмма), AC – общая. $\left.\begin{matrix}\Delta ACD = \Delta ABC \\ \Delta A_1BC_1 \quad ABC\end{matrix}\right| \Rightarrow \Delta ACD \quad \Delta A_1BC_1$.
4) Из п. 2 следует, что $\Delta ABC \sim \Delta A_1BC_1$. $\dfrac{A_1B}{AB} = \dfrac{BC_1}{CB} = \dfrac{A_1C_1}{AC}$;
$$\frac{BC_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC};\ BC = \frac{BC_1 \cdot AC}{A_1C_1};\ BC = \frac{3 \cdot 12}{4} = 9\ (\text{см}).$$

(*Ответ*: 9 см.)

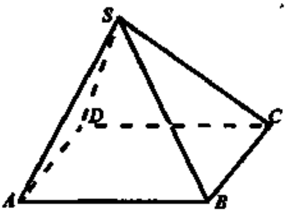


Рис. 9

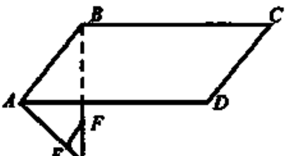


Рис. 10

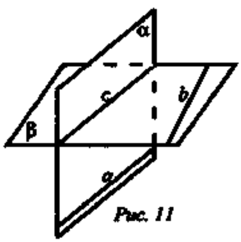


Рис. 11

2. *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм; $S \notin (ABCD)$ $(ASD) \cap (BSC) = b$ (рис. 9).

Доказать: $b \parallel (ABCD)$.

Доказательство: Пусть $b \cap (ABCD)$, значит в плоскости (SBC), $b \cap BC$, в плоскости (SAD); $b \cap AD$, следовательно,

$$\left.\begin{matrix} b \in (ABCD) \\ S \in b \end{matrix}\right| \Rightarrow S \in (ABCD),$$ но это противоречит условию, значит, $b \parallel (ABCD)$.

III уровень

Вариант I

1. *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм; $M \notin (ABCD)$, $EF = 10$ см; $E \in [AM]$, $ME : EA = 2 : 3$; $F = MB \cap (CDE)$ (рис. 10).

Найти: AB.

Решение:

1) $F = MB \cap (CDE)$, $EF \parallel AB$ по теореме о параллельности прямой и плоскости.
2) $\Delta ABM \sim \Delta FEM$ (по трем углам)

$$\frac{AB}{EF} = \frac{AM}{EM} = \frac{BM}{FM}; \quad AB = \frac{5 \cdot EF}{3} = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3} \text{ (см)}.$$

(*Ответ*: $16\frac{2}{3}$ см.)

2. *Дано:* $a \in \alpha$, $b \in \beta$, $\alpha \cap \beta = c$; $c \pitchfork a$, $c \pitchfork b$ (рис. 11).

Доказать: $a \parallel b$.

Доказательство:
$$\left.\begin{matrix} \left.\begin{matrix} a \in \alpha \\ c \in \alpha \\ a \pitchfork c \end{matrix}\right| \Rightarrow a \parallel c \\ \left.\begin{matrix} b \in \beta \\ c \in \beta \\ b \pitchfork c \end{matrix}\right| \Rightarrow b \parallel c \end{matrix}\right| \Rightarrow a \parallel b$$
по теореме о трех параллельных прямых.

Вариант II

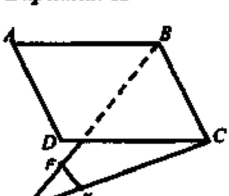


Рис. 12

1. *Дано:* $ABCD$ – ромб; $M \in (ABCD)$, $F \in [MB]$; $MF : FB = 1 : 3$, $K = (MC) \cap (AFD)$; $AD = 16$ см (рис. 12).

Найти: FK.

Решение:

1) $K \in MC$, $(ADF) \cap (BMC) = FK$, $FK \parallel BC$ по теореме о параллельности прямой и плоскости.

2) $ABCD$ – ромб, значит, $BC = AD$. $\Delta MFK \sim \Delta MBC$ (по трем углам)

$$\frac{MF}{MB} = \frac{MK}{MC} = \frac{FK}{BC};\ \frac{MF}{MB} = \frac{FK}{BC};\ FK = \frac{MF \cdot BC}{MB};$$

$$FK = \frac{1 \cdot 16}{3} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3} \text{ (см).}$$

(*Ответ*: $5\frac{1}{3}$ см.)

2. *Дано:* $c \parallel \gamma$, $c \in \alpha$, $c \in \beta$; $\alpha \cap \gamma = a$, $\beta \cap \gamma = b$ (рис. 13).

Доказать: $a \parallel b$.

Доказательство:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} a \in \gamma \\ c \parallel \gamma \end{array}\right| \Rightarrow a \parallel c \\ \left.\begin{array}{l} b \in \gamma \\ c \parallel \gamma \end{array}\right| \Rightarrow b \parallel c \end{array}\right| \Rightarrow a \parallel b$$ по теореме о трех параллельных прямых.

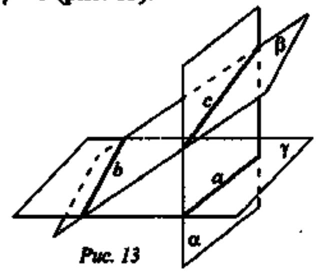


Рис. 13

VI. Подведение итогов

Домашнее задание

I уровень: № 32 (разобрана в учебнике), № 92.

II уровень: № 33, № 92.

Задача 33

Дано: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta_1 \cap \alpha_2 = a$, $\alpha_2 \cap \alpha_3 = b$, $\alpha_1 \cap \alpha_3 = c$ (рис. 14).

Доказать: $a \parallel b \parallel c$ или $a \cap b \cap c = M$.

Доказательство:

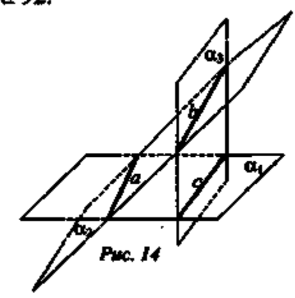


Рис. 14

1) Никакие две прямые не пересекаются, тогда они параллельны, так как a и $b \in \alpha_2$, значит, $a \parallel b$. Аналогично $b \parallel c$, $a \parallel c$.
2) Любые две прямые, например $a \cap b = M$, значит, $M \in \alpha_1$, $M \in \alpha_2$, $M \in \alpha_3$, а тогда, значит, M лежит во всех плоскостях и $b \cap c = M$.
3) $a = b$, тогда прямые являются пересечением всех трех плоскостей $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, а значит, плоскости проходят через одну прямую, что противоречит условию.

§ 2. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ

(уроки 11–15)

Урок 11. Скрещивающиеся прямые

Цели урока:

1) ввести определение скрещивающихся прямых;

2) ввести формулировку и уметь доказать признак и свойство скрещивающихся прямых.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Анализ самостоятельной работы

Сообщение итогов работы, анализ распространенных ошибок.

III. Изучение нового материала

Были рассмотрены два случая расположения прямых в пространстве. ($a \cap b$; $a \parallel b$). Общее для них: они лежат в одной плоскости (рис. 1, 2).

Рис. 1

$a \cap b$

(по следствию из аксиомы)

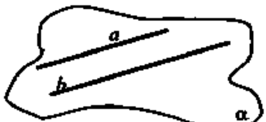


Рис. 2

$a \parallel b$

(по определению параллельных прямых)

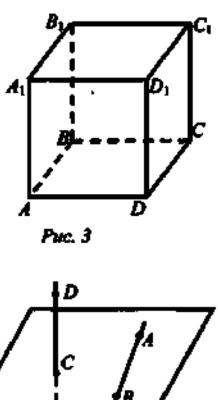


Рис. 3

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 3).

1. Являются ли параллельными прямые A_1A и DD_1; AA_1 и CC_1? Ответ обоснуйте. ($A_1A \parallel DD_1$ как противоположные стороны квадрата или лежат в одной плоскости и не пересекаются). ($A_1A \parallel DD_1$ и $DD_1 \parallel CC_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow A_1A \parallel CC_1$ по теореме о трех параллельных прямых).

2. Являются ли AA_1 и DC параллельными? Они пересекаются? Значит, в пространстве есть прямые, которые не пересекаются и не являются параллельными, так как они не лежат в одной плоскости. Такие прямые называются скрещивающимися.

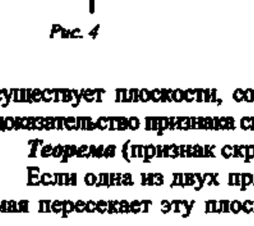


Рис. 4

Определение: Две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.

Обратить внимание учеников на то, что условие «не лежат в одной плоскости» означает, что не существует плоскости, содержащей эти прямые. Именно на этом построено доказательство признака скрещивающихся прямых.

Теорема (признак скрещивающихся прямых)

Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.

Дано: $AB \subset \alpha$, $CD \cap \alpha = C$, $C \notin AB$ (рис. 4).

Доказать, что AB скрещивается с CD.

Доказательство:

Допустим, что CD и AB лежит в одной плоскости. Пусть это будет плоскость β.

$$\left.\begin{array}{l} C \in \alpha \text{ и } C \in \beta \\ AB \subset \alpha \text{ и } AB \subset \beta \end{array}\right| \Rightarrow \alpha \equiv \beta.$$

Плоскости совпадают, чего быть не может, так как прямая CD пересекает α. Плоскости, которой принадлежат AB и CD не существует и следовательно по определению скрещивающихся прямых AB скрещивается с CD.

Закрепление изученной теоремы (с устным обоснованием) (рис. 5).

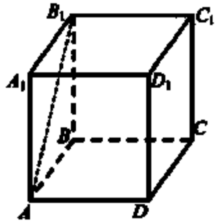


Рис. 5

1. Определить взаимное расположение прямых AB_1 и DC. (AB_1 скрещивается $\subset DC$.)
2. Указать взаимное расположение прямой DC и плоскости AA_1BB_1. ($DC \parallel$ плоскости AA_1BB_1.)
3. Является ли прямая AB_1 параллельной плоскости DD_1CC_1? (Да.)

При обсуждении 2 и 3 задания обратить внимание на существование плоскости, проходящей через одну из скрещивающихся прямых и параллельной другой прямой.

Сформулировать теорему.

Теорема:

Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой плоскости, и притом только одна.

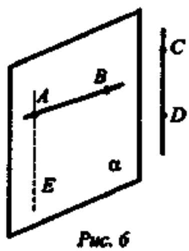


Рис. 6

Доказательство: учащиеся разбирают по учебнику самостоятельно с последующей записью на доске и в тетрадях.

Дано: AB скрещивается CD (рис. 6).

Построить α: $AB \subset \alpha$, $CD \parallel \alpha$.

Доказать, что α – единственная.

1. Через точку A проведем прямую AE, $AE \parallel CD$.
2. Прямые AE и AB пересекаются и образуют плоскость α. $AB \subset \alpha$ (по построению), $CD \parallel \alpha$ (по признаку параллельности прямой и плоскости). α – искомая плоскость.
3. Докажем, что α – единственная плоскость. α – единственная по следствию из аксиом. Любая другая плоскость, которой принадлежит AB, пересекает AE и, следовательно, прямую CD.

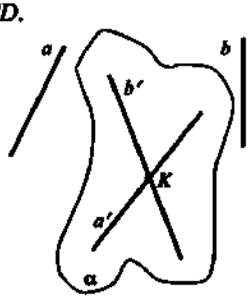


Рис. 7

Обратить внимание учащихся, что в доказательстве этой теоремы дается способ построения плоскости, проходящей через данную точку и параллельной двум скрещивающимся прямым. Рассмотреть задачу на построение.

Задача

Построить плоскость α, проходящей через точку K и параллельной скрещивающимся прямым a и b (рис. 7).

Построение:

1. Через точку K провести прямую $a' \parallel a$. (прямая a и точка K определяют плоскость; построение возможно и a' – единственная прямая).
2. Через точку K провести прямую $b' \parallel b$.
3. Через пересекающиеся прямые проведем плоскость α. α – искомая, единственная плоскость.

IV. Закрепление изученного материала

1. Решение задач № 34 и 39 на доске и в тетрадях.

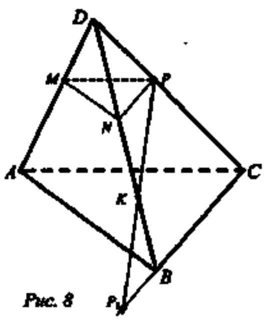


Рис. 8

1) ***Задача № 34***

Дано: $D \in$ плоскости ABC. $AM = MD$; $DN = NB$; $DP = PC$; $K \in BN$ (рис. 8).

Определить взаимное расположение прямых:

а) ND и AB. $ND \cap AB = B$ (D, A, N и B лежат в одной плоскости и $AB \nparallel ND$);

б) PK и BC. $PK \cap BC = P_1$ (K, P, C, B лежат в одной плоскости и $PK \nparallel BC$);

в) MN и AB. $MN \parallel AB$ (по свойству средней линии треугольника $MN \parallel AB$);

г) MP и AC. $MP \parallel AC$ (по свойству средней линии треугольника $MP \parallel AC$);

д) KN и AC. $KN \cap$ плоскости $ADC = D$; $D \notin AC \Rightarrow KN$ скрещивается с AC по признаку скрещивающихся прямых;

е) MD и BC; $MD \cap$ плоскости $ABC = A$, $A \notin BC \Rightarrow MD$ скрещивается с BC по признаку скрещивающихся прямых.

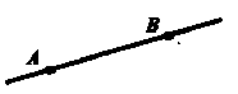


Рис. 9

2) ***Задача № 39***

Дано: AB и CD скрещиваются (рис. 9).

Доказать, что AD и BC скрещиваются.

Доказательство:

1. Точка A, C, D лежат в одной плоскости (по аксиоме A_1). Пусть эта плоскость α.
2. $B \notin \alpha$, так как AB и CD скрещиваются (по определению скрещивающихся прямых).
3. $BC \cap \alpha = C$; $C \notin AD \Rightarrow AD$ и BC скрещиваются (по признаку скрещивающихся прямых).

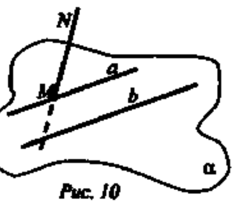


Рис. 10

2. *Самостоятельно решить задачи с последующей проверкой:* № 93, 94.

1) ***Задача № 93***

Дано: $a \parallel b$. $MN \cap a = M$ (рис. 10).

Определить взаимное расположение прямых MN и b.

Решение:

1. $a \parallel b \Rightarrow$ существует плоскость α, проходящая через a и b.
2. $b \subset \alpha$; $\left.\begin{matrix} MN \cap \alpha = M \\ M \notin b \end{matrix}\right| \Rightarrow MN$ и b скрещиваются (по признаку скрещивающихся прямых);

(*Ответ*: MN и b скрещиваются.)

2) ***Задача № 94***

Дано: a скрещиваются b. $B \notin a$ и $B \notin b$ (рис. 11).

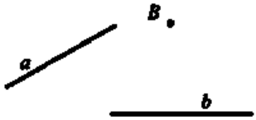


Рис. 11

Определить взаимное расположение плоскостей α и β. α проходит через прямую a и точку B. β проходит через прямую b и точку B. $\alpha \cap \beta$, так как плоскости имеют одну общую точку и по аксиоме A_3 они пересекаются и точка B принадлежит линии пересечения.

V. Подведение итогов

Домашнее задание

П. 7 № 35, 36, 37.

Дополнительная задача

Плоскости α и β пересекаются по прямой l, которая является скрещивающейся с прямой a.

Докажите, что прямая a пересекает хотя бы одну из плоскостей α и β.

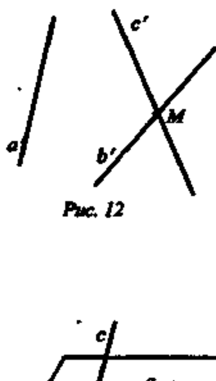


Рис. 12

№ 35. Предположим, что a и b не скрещиваются $\Rightarrow a \parallel b$ или $a \cap b$. Через a и b проведем плоскость β. Предположим, что а не скрещиваются $c \Rightarrow a \parallel c$ или $a \cap c$. Через прямые a и c проведем плоскость γ. $\left.\begin{matrix} a \subset \gamma \\ a \subset \beta \end{matrix}\right| \Rightarrow$

a – линия пересечения плоскостей β и γ. $\left.\begin{matrix} b \subset \beta \Rightarrow M \in \beta \\ C \subset \gamma \Rightarrow M \in \gamma \end{matrix}\right| \Rightarrow M \in a$, что противоречит условию.

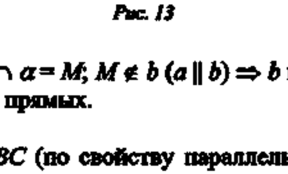


Рис. 13

Следовательно, a и b скрещиваются или a и c скрещиваются.

№ 36. $a \parallel b \Rightarrow$ существует плоскость α (рис. 13), которой принадлежат эти прямые. $c \cap \alpha = M$; $M \notin b$ $(a \parallel b) \Rightarrow b$ и c скрещиваются по признаку скрещивающихся прямых.

№ 37 (рис. 14, рис. 15).

а) Рис. 14. $m \parallel AC$ и $BC \cap AC = C \Rightarrow m \cap BC$ (по свойству параллельных прямых).

б) Рис. 15, $m \cap AB = M$, $AB \subset$ плоскости $ABC \Rightarrow m \cap$ плоскости $ABC = M$.

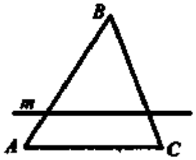


Рис. 14

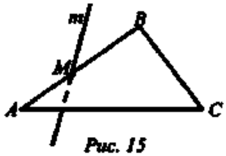


Рис. 15

$\left.\begin{array}{l} m \cap (ABC) = M \\ M \notin BC \end{array}\right| \Rightarrow$ m и BC скрещиваются по признаку скрещивающихся прямых.

Дополнительная задача

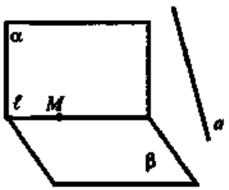


Рис. 16

Пусть $\left.\begin{array}{l} a \not\pitchfork \alpha \\ a \not\pitchfork \beta \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} a \parallel \alpha \\ a \parallel \beta \end{array}$ (рис. 16). Возьмем любую точку M на прямой l.

Через прямую a и M проведем плоскость γ.

$\gamma \cap \alpha = l_1$, так как $M \in \gamma$ и $M \in \alpha$ (по A_3).

$\gamma \cap \beta = l_2$, так как $M \in \gamma$ и $M \in \beta$ (по A_3).

$a \parallel \alpha$ и $\alpha \cap \gamma = l_1 \Rightarrow a \parallel l_1$.

$a \parallel \beta$ и $\beta \cap \gamma = l_2 \Rightarrow a \parallel l_2$.

Итак, $a \parallel l_1$ и $a \parallel l_2 \Rightarrow l_1 \parallel l_2$, чего быть не может, т.к. $l_1 \cap l_2 = M$. Следовательно, $a \cap \alpha$ или $a \cap \beta$.

Урок 12. Углы с сонаправленными сторонами. Угол между прямыми

Цели урока:

1) ввести формулировку и доказательство теоремы о равенстве углов с сонаправленными сторонами;
2) научится находить угол между прямыми в пространстве.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Активизация знаний учащихся

Теоретический опрос

а) Подготовить у доски доказательство признака скрещивающихся прямых.

б) Фронтальный теоретический опрос:

1. Верно ли утверждение: если две прямые не имеют общих точек, то они параллельны? (Нет.)
2. Две прямые параллельны некоторой плоскости. Могут ли эти прямые:

   а) Пересекаться? (Да.)

   б) Быть скрещивающимися? (Да.)
3. Могут ли скрещивающиеся прямые a и b быть параллельными прямой c? (Нет.)

4. Даны две скрещивающиеся прямые a и b. Точки A и A_1 лежат на прямой a, точки B и B_1 лежат на прямой b. Как будут расположены прямые AB и A_1B_1? (*Ответ*: AB скрещивается с A_1B_1.)
5. Прямая a скрещивается с прямой b, а прямая b скрещивается с прямой c. Следует ли из этого, что прямые a и c – скрещиваются? (Нет.)
6. Каково должно быть взаимное расположение трех прямых, чтобы можно провести плоскость, содержащую все прямые? (Прямые попарно пересекаются или две параллельны, а третья их пересекает.)

Проверка домашнего задания.

Проверить задачи № 35, № 37 (дополнительную задачу – индивидуально).

III. Изучение нового материала

Ввести понятие сонаправленных лучей и углов с сонаправленными сторонами.

Любая прямая a, лежащая в плоскости, разделяет плоскость на 2 части, называемые полуплоскостями. Прямая a называется границей каждой из этих полуплоскостей.

Два луча OA и O_1A_1 (рис. 1), не лежащие на одной прямой, называются сонаправленными, если они параллельны и лежат в одной плоскости с границей OO_1. Два луча OA и O_1A_1, лежащие на одной прямой, называются сонаправленными, если они совпадают или один из них содержит другой.

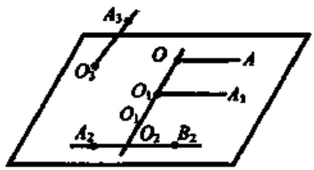


Рис. 1

1. *Найти* сонаправленные лучи.

2. *Указать* лучи, которые не являются сонаправленными.

Доказать теорему:

Теорема:

Если стороны двух углов соответственно сонаправлены, то такие углы равны.

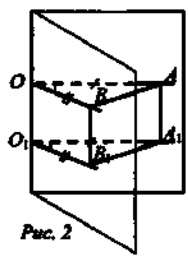


Рис. 2

Дано: $\angle O$ и $\angle O_1$ с сонаправленными сторонами (рис. 2).

Доказать: $\angle O = \angle O_1$.

Доказательство: На сторонах угла O отметим любые точки A и B и на соответственных сторонах угла O_1 отметим точки A_1 и B_1 такие, что $O_1A_1 = OA$ и $O_1B_1 = OB$.

1. *Рассмотрим* OAA_1O_1. $\left.\begin{matrix} OA \parallel O_1A_1 \\ OA = O_1A_1 \end{matrix}\right| \Rightarrow OA \parallel O_1A_1$, OAA_1O_1 – параллелограмм (по признаку). Значит, $AA_1 \parallel OO_1$ и $AA_1 = OO_1$.
2. *Рассмотрим* OBB_1O_1. $\left.\begin{matrix} OB \parallel O_1B_1 \\ OB = O_1B_1 \end{matrix}\right| \Rightarrow OBB_1O_1$ – параллелограмм (по признаку). Значит, $BB_1 \parallel OO_1$ и $BB_1 = OO_1$.

Вывод:

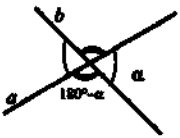
$AA_1 \parallel OO_1$ и $BB_1 \parallel OO_1 \Rightarrow AA_1 \parallel BB_1$; $AA_1 = OO_1$ и $BB_1 = OO_1 \Rightarrow AA_1 = BB_1$. Следовательно, четырехугольник AA_1BB_1 – параллелограмм (по признаку). Следовательно, $AB = A_1B_1$.

3. *Рассмотрим* ΔABO и $\Delta A_1B_1O_1$. $\Delta ABO = \Delta A_1B_1O_1$ (по трем сторонам).

Вывод:

$\angle O = \angle O_1$.

Ввести определение угла между пересекающимися прямыми.



Углом между пересекающимися прямыми называется угол, не превосходящий любой из трех остальных (то есть наименьший из четырех образованных). Необходимо подчеркнуть, что угол между прямыми – это градусная мера, а не геометрическая фигура.

По определению $0° < \alpha \le 90°$.

Угол между скрещивающимися прямыми *AB* и *CD* определяется как угол между пересекающимися прямыми A_1B_1 и C_1D_1 соответственно параллельными *AB* и *CD* (рис. 3).

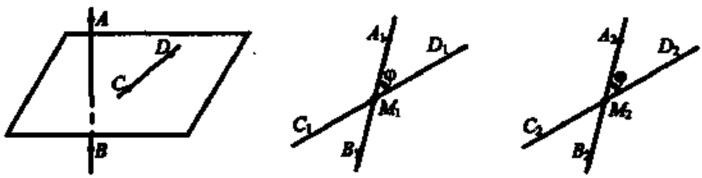


Рис. 3

Зависит ли величина угла φ от выбора точки M_1?

Выбрать (отметим) любую точку M_2 и построить $A_2B_2 \parallel AB$ и $C_2D_2 \parallel CD$.

Ответить на вопросы:

1. **Почему $A_2B_2 \parallel A_1B_1$ и $C_2D_2 \parallel C_1D_1$? (По теореме о трех параллельных прямых.)**
2. **Являются ли углы $\angle A_1M_1D_1$ и $\angle A_2M_2D_2$ углами с соответственно параллельными сторонами? (Да.)**

Вывод:

1) **$\angle A_1M_1B_1 = \angle A_2M_2B_2$ (по изученной теореме).**
2) **Величина угла между скрещивающимися прямыми не зависит от выбора точки.**

IV. Закрепление изученного материала

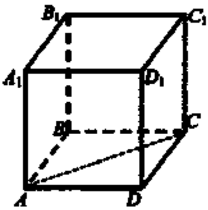


Рис. 4

1. Устно. *Дан* куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 4).

Найдите угол между прямыми. 1) *BC* и CC_1 (90°); 2) *AC* и *BC* (45°); 3) D_1C_1 и *BC* (90°). 4) A_1B_1 и *AC* (45°).

2. ***Задача № 44*** (на доске и в тетрадях).

Дано: $OB \parallel CD$; *OA* и *CD* скрещиваются; а) $\angle AOB = 40°$; б) $\angle AOB = 135°$; в) $\angle AOB = 90°$ (рис. 5).

Найти: угол между *OA* и *CD*.

Решение:

а) $\angle AOB = 40°$; $CD \parallel OB$, то угол между скрещивающимися прямыми *OA* и *CD* равен 40°.

б) $\angle AOB = 135°$. Угол между пересекающимися прямыми OA и OB равен: $180° - 135° = 45°$. Угол между скрещивающимися прямыми OA и CD равен $45°$.

в) $\angle AOB = 90°$. Угол между скрещивающимися прямыми OA и CD равен $90°$.

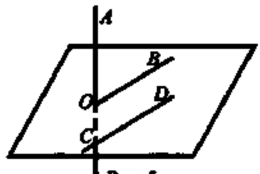


Рис. 5

(*Ответ*: а) $40°$; б) $45°$; в) $90°$.)

3. Дополнительная задача

Треугольники ABC и ADC лежат в разных плоскостях. PK – средняя линия ΔADC с основанием AC. Определить взаимное расположение прямых PK и AB и найти угол между ними, если $\angle C = 80°$; $\angle B = 40°$.

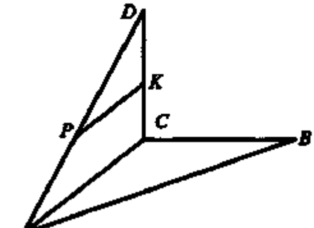


Рис. 6

Дано: ΔADC и ΔABC; PK – средняя линия ΔADC. $\angle B = 40°$; $\angle C = 80°$ (рис. 6).

Определить: взаимное расположение прямых PK и AB угол между PK и AB.

Решение:

1. $AB \cap (ADC) = A$; $A \notin PK$, так как $PK \parallel AC$ (по свойству средней линии треугольника) $\Rightarrow AB$ и PK скрещиваются.
2. $PK \parallel AC$. Угол между пересекающимися прямыми AC и AB равен: $\angle A = 180° - (80° + 40°) = 60°$.
3. Угол между скрещивающимися прямыми равен $60°$.

(*Ответ*: AB и PK скрещиваются; $60°$.)

V. Подведение итогов

Домашнее задание

П. 8; 9 № 40; 42.

Дать указание: повторить свойство четырехугольников, описанных около окружности.

Дополнительная задача

Трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания) и треугольник AED лежат в разных плоскостях. MP – средняя линия ΔAED ($MP \parallel AD$). Каково взаимное расположение прямых MP и AB? Чему равен угол между этими прямыми, если $\angle ABC = 110°$.

№ 40. *Дано:* a скрещиваются b; $M \in a$; $N \in b$; $a \subset \alpha$ и $N \in \alpha$; $b \subset \beta$ и $M \in \beta$ (рис. 7).

Определить: а) $b \subset \beta$? б) $\alpha \cap \beta$?

а) $a \subset \alpha$, так как a скрещиваются b, то $b \not\subset \alpha$.

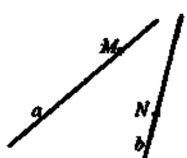


Рис. 7

б) $$\left.\begin{array}{l} N \in \alpha \\ M \in \alpha \text{ (так как } b \subset \beta) \end{array}\right| \Rightarrow MN \subset \alpha \left| \Rightarrow \alpha \cap \beta = \right.$$
$$\left.\begin{array}{l} M \in \beta \\ N \in \beta \text{ (так как } b \subset \beta) \end{array}\right| \Rightarrow MN \subset \beta \left| \quad = MN. \right.$$

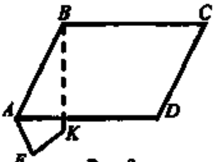


Рис. 8

№ 42. *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм; $ABEK$ – трапеция. $AB = 22,5$ см. $EK = 27,5$ см и $ABEK$ – описанный около окружности четырехугольник (рис. 8).

Определить: взаимное расположение CD и EK.

Найти: P_{ABKE}.

Решение:

а) $EK \parallel AB$ (по определению трапеции) $\Rightarrow$ $EK \parallel CD$ (по теореме о трех параллельных прямых. $CD \parallel AB$ (по определению параллелограмма);

б) $AB + EK = AE + BK$ (по свойству четырехугольников, описанных около окружности). $P_{ABEK} = AB + EK + AE + BK = 2 \cdot (AB + EK) =$ $= 2 \cdot (22,5 + 27,5) = 100$ (см).

(*Ответ*: $EK \parallel CD$; 100 см.)

Дополнительная задача

Рис. 9

Дано: $ABCD$ – трапеция; ADE – треугольник; MP – средняя линия (рис. 9).

Определить: взаимное расположение прямых MP и AB.

Найти угол между ними, если $\angle ABC = 110°$.

Решение:

1. $\left.\begin{array}{l} AB \cap (ADE) = A \\ A \notin MP (MP \parallel AD) \end{array}\right| \Rightarrow$ AB и MP скрещиваются (по признаку скрещивающихся прямых).
2. $MP \parallel AD$, $AB \parallel BC \Rightarrow MP \parallel BC$ (по теореме о трех параллельных прямых).
3. Угол между пересекающимися прямыми AB и BC равен: $180° - 110° = 70°$. Угол между скрещивающимися прямыми AB и MP равен $70°$.

Урок 13. Решение задач по теме «Взаимное расположение прямых в пространстве. Угол между двумя прямыми»

Цели урока:

1) закрепление теоретического материала;
2) совершенствование навыков решения задач по данной теме.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос:
   а) один ученик доказывает признак скрещивающихся прямых;
   б) второй ученик доказывает теорему о скрещивающихся прямых;
   в) третий ученик доказывает теорему об углах с сонаправленными сторонами.

2. Проверка домашнего задания (на переносной доске): а) один ученик решает № 40 из домашнего задания, б) второй ученик решает № 42 из домашнего задания.

№ 40. Дано: a и b – скрещивающиеся прямые; γ – плоскость, $a \notin \gamma$, $b \in \gamma$. Точка $M \in a$, точка $N \in b$. Через a и N проведена плоскость α. Через b и M проведена плоскость β (рис. 1).

Найти: а) лежит ли прямая b в плоскости α? б) пересекаются ли плоскости α и β?

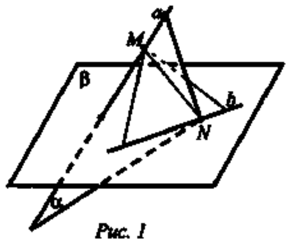


Рис. 1

Решение:

а) Если бы $b \in \alpha$, тогда в плоскости α было бы две возможности:
   1) $b \parallel a$ – но это противоречит условию;
   2) $b \cap a$ – но это противоречит условию; $b \cap \alpha$ в точке N, $N \notin a$.

Вывод: $b \notin \alpha$.

б) $\left.\begin{array}{l} M \in \alpha, N \in \alpha \\ M \in \beta, N \in \beta \end{array}\right| \Rightarrow$ прямая MN – общая для плоскостей α и β.

Вывод: $\alpha \cap \beta$ по прямой MN.

(*Ответ*: $b \notin \alpha$, MN – прямая, по которой $\alpha \cap \beta$).

№ 42. Дано: $ABCD$ – параллелограмм; $ABEK$ – трапеция: EK – основание; $EK \notin (ABCD)$ (рис. 2).

а) ***Выясните*** взаимное расположение прямых CD и EK.

б) ***Найти***: $P_{(ABEK)}$, если $AB = 22{,}5$ см; $EK = 27{,}5$ см.

Решение:

1. $CD \parallel AB$ – как противолежащие стороны параллелограмма $AB \parallel EK$ – по определению трапеции. Значит, $CD \parallel EK$.
2. Так как в трапецию можно вписать окружность, то $AB + KE = BE + AK$. Тогда $P_{(ABEK)} = (22{,}5 + 27{,}5) \cdot 2 = 50 \cdot 2 = 100$ (см).

(*Ответ*: а) $CD \parallel EK$; б) $P_{(ABEK)} = 100$ см.)

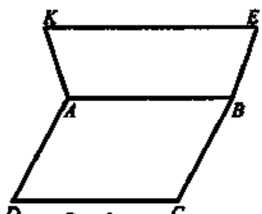


Рис. 2

Остальные учащиеся отвечают на вопросы математического диктанта.

Вариант I

1. Какие две прямые в пространстве называются параллельными?
2. Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости.
3. Какие возможны случаи взаимного расположения прямой и плоскости?
4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Запишите четыре пары параллельных прямых.
5. Верно ли утверждение: если одна из двух параллельных прямых параллельна плоскости, то вторая прямая не пересекает эту плоскость.

Вариант II

1. Какие прямая и плоскость называются параллельными?
2. Сформулируйте теорему о параллельных прямых.
3. Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости.
4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Запишите четыре пары пересекающихся прямых.

5. Верно ли утверждение: если одна из двух прямых параллельна плоскости, а вторая пересекает эту плоскость, то прямые параллельны.

Далее проверяется решение домашнего задания, написанного на доске, а математический диктант собирается учителем и проверяется.

III. Решение задач

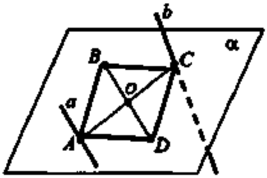


Рис. 3

№ 38. Чертеж на доске, решение обсуждается устно.

Дано: $ABCD$ – ромб; $a \parallel BD$; $A \in a$; $b \in (ABCD)$; $c \in b$ (рис. 3).

Доказать: а) $a \cap CD$; б) a и b – скрещивающиеся прямые.

Доказательство:

А) 1. Прямая a проходит через точку $A \in \alpha$, и $a \parallel BD$ (по условию), $BD \in \alpha$, значит, $a \in \alpha$.

2. $CD \in \alpha$, $CD \cap BD$, $a \parallel BD \Rightarrow a \cap CD$.

Б) $a \in \alpha$; $b \notin \alpha$; $b \cap \alpha$ в точке $D \Rightarrow$ (по теореме п. 7) a и b – скрещивающиеся прямые, что и требовалось доказать.

Определение:

Четырехугольник называется пространственным, если его вершины не лежат в одной плоскости.

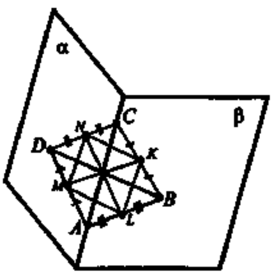


Рис. 4

№ 43. Дано: $ABCD$ – пространственный четырехугольник; L – середина AB; K – средина BC; N – средина DC; M – средина DA (рис. 4).

Доказать: LKNM – параллелограмм.

Решение:

1) LK –средняя линия ΔABC, $LK = \frac{1}{2}AC$, $LK \parallel AC$;

2) MN – средняя линия ΔADC $MN = \frac{1}{2}AC$, $MN \parallel AC$;

3) ML – средняя линия ΔADB, $ML = \frac{1}{2}BD$, $ML \parallel BD$;

4) NK – средняя линия ΔCBD, $NK = \frac{1}{2}BD$, $NK \parallel BD$;

5) $LK \parallel MN$, $LK = MN$; $ML \parallel NK$, $ML = NK$;

6) Построим плоскость $MNKL$, которая по определению параллелограмма будет являться параллелограммом.

Вывод: $MNKL$ – параллелограмм.

IV. Подведение итогов

Домашнее задание

П. 4–9, вопросы: № 1–8, I глава; № 45; 47; 90. № 90 – I уровень; № 45 – II уровень; № 47 – III уровень.

Урок 14. Решение задач по теме «Параллельность прямых и плоскостей»

Цели урока:

1) повторить теорию;
2) подготовить учащихся к контрольной работе.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся

1. Проверка домашнего задания.

а) первый ученик у доски решает № 45 (а);
б) второй ученик у доски решает № 46;
в) третий ученик у доски решает № 90.

№ 45а. Дано: $ABCD$ – параллелограмм; $a \parallel BC$; $a \notin (ABCD)$ (рис. 1).

Доказать: a и CD – скрещивающиеся.

Найти: угол между a и CD, если $\angle BCD = 50°$.

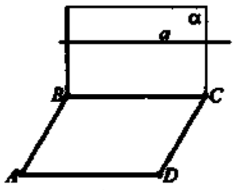


Рис. 1

Решение:

I. 1) Так как $a \parallel BC$, то проведем через них плоскость α.
2) $D \notin \alpha$, так как иначе $DC \in \alpha$, то есть α совпала бы с плоскостью $ABCD$ и $a \in (ABCD)$, что противоречит условию.
3) Тогда $DC \cap \alpha$ в точке $C \notin a$;
4) ***Вывод***: по теореме a и CD – скрещивающиеся.

II. Проведем через точку C прямую, параллельную прямой a. Это будет прямая CB. Значит, угол между a и CB равен углу между прямыми CB и CD, то есть $\angle BCD = 50°$.

(*Ответ*: 50°.)

№ 47. Дано: $ABCD$ – пространственный четырехугольник; $AB = CD$, N – середина AD; M – середина BC (рис. 2).

Доказать: угол между AB и MN и угол между CD и MN равны.

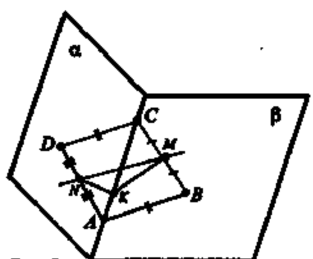


Рис. 2

Решение:

1. Точка K – середина AC. Через точку M проведем $MK \parallel AB$, MK –средняя линия ΔABC, $\angle(MN, AB) = \angle KMN$.
2. MK – средняя линия ΔABC, $MK \parallel AB$; $MK = \frac{1}{2} AB$. Через точку N проведем $NK \parallel DC$, NK – средняя линия ΔADC, $\angle(DC, MN) = \angle MNK$.
3. NK – средняя линия ΔCDP; $NK \parallel CD$; $NK = \frac{1}{2} CD$.
4. $KM = \frac{1}{2} AB$, $NK = \frac{1}{2} DC$, так как $AB = DC$, то $KM = NK$, то есть ΔNMK – равнобедренный.

5. ***Вывод:*** $\angle KMN = \angle MNK$, что и требовалось доказать.

6. $\widehat{MN,CD} = \widehat{MN,AB}$.

№ 90 (рис. 3).

а) *Решение:* Если $AB \in \alpha$ и $AB \parallel DC$, то $DC \parallel \alpha$;

б) *Решение:* AB не параллельно CD. Так как AB и CD лежат в одной плоскости $ABCD$, то $AB \cap CD$. Значит, CD пересекает плоскость α.

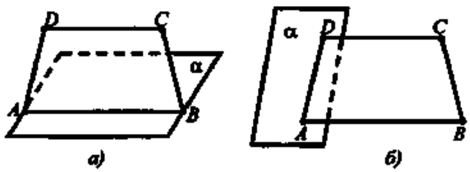


Рис. 3

2. ***Работа по карточкам*** (см. приложение)

Три ученика работают по карточкам.

Остальные учащиеся решают задачу по планиметрии.

Дано: $ABCD$ – трапеция, описанная около окружности. $AB = CD$. T, M, P, E – точки касания окружности. $BT = 2$, $AE = 8$ (рис. 4).

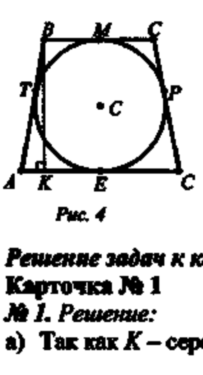


Рис. 4

Найти: S_{ABCD}.

Решение:

1. $AB = 10$, $AD = 16$, $BC = 2AB - AD = 4$.
   $AK = (16 - 4) : 2 = 6$.
2. $BK = \sqrt{AB - AK} = \sqrt{64} = 8$.
3. $S = \frac{1}{2}\ (BC + AD)\cdot h = \frac{1}{2}\cdot(16+4)\cdot 8 = 80$.

(*Ответ*: 80.)

Решение задач к карточкам

Карточка № 1

№ 1. Решение:

а) Так как K – середина AB, и M – середина BC, то KM – средняя линия ΔABC. $KM \parallel AC$ и $KM = \frac{1}{2}AC$. Так как $ACFE$ – квадрат, то $EF \parallel AC$.

Вывод: $KM \parallel EF$.

б) Так как $ACFE$ – квадрат, то $AC = AE = 8$см. $KM = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\cdot 8 = 4$ (см).

(*Ответ*: а) $KM \parallel EF$; б) $KM = 4$ см.)

№ 2. *Дано:* $ABCD$ – трапеция; $BC \parallel AD$ – основания. $AD \in \alpha$; точка E – середина AB; точка F – середина CD; $EF \notin \alpha$ (рис. 5).

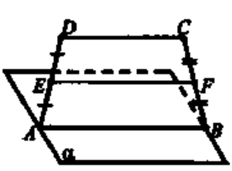


Рис. 5

Доказать: $EF \parallel \alpha$.

Доказательство:

1. Так как E – середина AB, F – середина CD, то EF – средняя линия трапеции $ABCD$. $EF \parallel AD$ – по свойству средней линии.

2. $AD \in \alpha$ – по условию.
3. ***Вывод:*** $EF \parallel \alpha$ (по признаку параллельности прямой и плоскости, п. 6, стр. 12).

№ 3. Дано: точки A, B, C, и D не лежат в одной плоскости (рис. 6).

Найти: а) прямую, скрещивающуюся с AB; б) прямую, скрещивающуюся с BC.

(Ответ: а) DC; б) AD.)

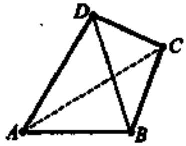


Рис. 6

Карточка № 2

№ 1. Дано: A, B, C, D – не лежат в одной плоскости; точка E – середина AB; точка F – середина BC; точка M – середина DC; точка K – середина AD (рис. 7).

а) *Доказать:* $EFMK$ – параллелограмм.

б) *Найти:* $P_{(EFMK)}$, если $AC = 6$ см; $BD = 8$ см.

Решение:

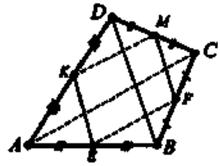


Рис. 7.

а) KM – средняя линия $\Delta ADC \Rightarrow KM \parallel AC$; $KM = \dfrac{1}{2}AC$; MF – средняя линия ΔDCB $\Rightarrow MF \parallel BD$; $MF = \dfrac{1}{2}BD$; EF – средняя линия $\Delta ABC \Rightarrow EF \parallel AC$; $EF = \dfrac{1}{2}AC$; KE – средняя линия $\Delta ABD \Rightarrow KE \parallel BD$; $KE = \dfrac{1}{2}BD$. Значит, $KM \parallel AC \parallel EF$; $KM \parallel EF$; $KM = EF$; $MF \parallel BD \parallel KE$; $MF \parallel KE$; $MF = KE$.

Вывод: $EFMK$ – параллелограмм.

б) $P_{(EFMK)} = KE = KM = MF = FE$ или $(KM + MF) \cdot 2 = \dfrac{1}{2}(AC + BD) \cdot 2 =$
$= 6 + 8 = 14$ см.

(*Ответ*: а) $EFMK$ – параллелограмм; б) $P_{(EFMK)} = 14$ см.)

Дано: α – плоскость; точка $A \in \alpha$; $a \notin \alpha$; $a \parallel \alpha$; $A \in b$; $a \parallel b$ (рис. 8).

Доказать: $b \in \alpha$.

Доказательство: Пусть $b \notin \alpha$, но b проходит через точку $A \in \alpha$, $\Rightarrow b \cap \alpha$ в точке A. А так как $a \parallel \alpha$, то получается, что $b \cap a$, что противоречит условию. Значит, прямая $b \in \alpha$, что и требовалось доказать. (*Ответ*: $b \in \alpha$.)

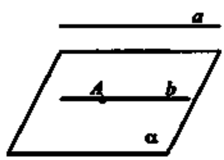


Рис. 8

№ 3. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (рис. 9).

Указжите: три прямые, проходящие: а) через точку D и скрещивающиеся с прямой AB_1; б) через точку B_1 и скрещивающиеся с прямой A_1D_1.

Решение:

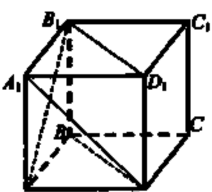


Рис. 9

а) прямая $AB_1 \in (AA_1B_1B)$; прямые DD_1, DC и DB – скрещивающиеся с прямой AB_1, так как они не лежат в плоскости (AA_1B_1B);

б) прямая $A_1D \in (AA_1D_1D)$; прямые B_1D_1, B_1C_1 и BB_1 – скрещивающиеся с прямой A_1D, так как они не лежат в плоскости (AA_1D_1D).

(*Ответ*: а) DD_1, DC, DB; б) B_1D_1; B_1C_1; BB_1.)

Карточка № 3

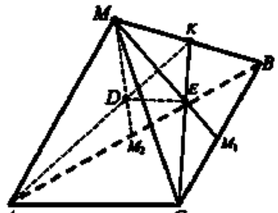


Рис. 10

№ 1. Дано: (ABC) – плоскость; точка $M \notin (ABC)$; точка D – точка пересечения медиан ΔMAB; точка E – точка пересечения медиан ΔMBC (рис. 10).

а) *Доказать:* $ADEC$ – трапеция.

б) *Найти:* DE, если $AC = 12$ см.

Решение:

а) Рассмотрим ΔAKC и ΔDEK. У них а) $\dfrac{KD}{KA} = \dfrac{KE}{KC} = \dfrac{1}{3}$ (по свойству медиан в треугольниках); б) $\angle K$ – общий. Значит, ΔAKC и ΔDEK подобны по двум сторонам и углу между ними.

Из этого следует, $\left.\begin{array}{l}\angle KDE = \angle KAC\\ \angle KED = \angle KCA\end{array}\right\}$ и они являются соответственными при прямых DE и AC и секущих AK и CK.

Вывод: $DE \parallel AC$, значит, $ADEC$ – трапеция.

б) Так как $\Delta AKC \sim \Delta DKE$ с коэффициентом подобия $k = \dfrac{1}{3}$, то

$$DE = \frac{1}{3}AC = \frac{12}{3} = 4 \text{ (см).}$$

(*Ответ*: а) $ADEC$ – трапеция; б) $DE = 4$ см.)

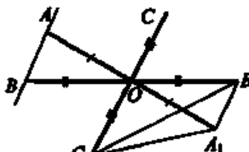


Рис. 11

№ 2. Дано: AA_1, BB_1, CC_1 – отрезки, не лежащие в одной плоскоскости. $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1$ в точке O. Точка O – их середина (рис. 11).

Доказать: прямая $AB \parallel (A_1CB_1)$.

Доказательство: Рассмотрим плоскость, проходящую через отрезки AA_1 и BB_1 (такая есть и единственная, так как $AA_1 \cap BB_1$ в точке O).

В этой плоскости лежит четырехугольник ABA_1B_1, диагонали которого точкой пересечения O делятся пополам. Значит, ABA_1B_1 – параллелограмм. Следовательно, $AB \parallel A_1B_1$, а A_1B_1 прямая, которая лежит в плоскости A_1CB_1, следовательно, $AB \parallel (A_1CB_1)$. (*Ответ*: $AB \parallel (A_1CB_1)$.)

Выслушивается и проверяется решение домашних задач.

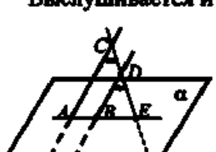


Рис. 12

III. Решение задач (фронтальная работа)

Дополнительные задачи, № 88 стр. 32.

Дано: $AC \parallel BD$ – прямые; $AC \cap \alpha$ в точке A; $DB \cap \alpha$ в точке B; точки C и D лежат по одну сторону от α; $AC = 8$ см, $BD = 6$ см, $AB = 4$см (рис. 12).

Доказать: $CD \cap \alpha$ в точке E.

Найти: BE.

Решение:

1. Проведем плоскость через прямые AC и BD. Если $CD \parallel AB$, то $ABCD$ – параллелограмм, значит $AC = BD$, но $AC = 8$ см, $BD = 6$ см. Значит CD не параллельна AB, но так как они лежат в одной плоскости, то $CD \cap AB$ в точке E, то есть $CD \cap \alpha$ в точке E.
2. а) $\left.\begin{array}{l}\angle CAE = \angle DBE,\\ \angle ACE = \angle BDE\end{array}\right| \Rightarrow$ как соответственные при $AC \parallel BD$ и секущих AE и CE.

   б) $\Delta EDB \sim \Delta ECA$ (по трем углам) $\Rightarrow \frac{EA}{EB} = \frac{AC}{BD} = \frac{AE}{BE} = \frac{4}{3}$; $\frac{AE}{BE} = \frac{AB}{BE} +$

   $+ \frac{BE}{BE} = \frac{AB}{BE} + 1 = \frac{4}{3} \Rightarrow AB = \frac{1}{3}BE$, $BE = 12$ (см).

(*Ответ*: 12 см.)

Дополнительные задачи, № 97 стр. 32 (рис. 13 *а*, *б*, *в*).

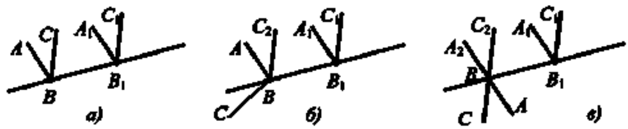


Рис. 13

Решение: Рассмотрим $\angle ABC$ и $\angle A_1B_1C_1$ у которых $AB \parallel A_1B_1$ и $BC \parallel B_1C_1$. Проведем прямую BB_1.

а) $BA \uparrow\uparrow B_1A_1$ и $BC \uparrow\uparrow B_1C_1$, тогда $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ (см. п. 8) (рис. 13*а*).

б) $BA \uparrow\uparrow B_1A_1$, $BC \uparrow\downarrow B_1C_1$, тогда рассмотрим $\angle ABC_2$ – смежный к $\angle ABC \Rightarrow$ (по теореме пункта 7) $\angle ABC_2 = \angle A_1B_1C_1$ значит, $180° = \angle ABC_2 + \angle A_1B_1C_1 = \angle A_1B_1C_1 + \angle ABC$ (рис. 13*б*).

в) $BA \uparrow\downarrow B_1A_1$, $BC \uparrow\downarrow B_1C_1$, тогда рассмотрим $\angle A_2BC_2$ – вертикальный к $\angle ABC$. Следовательно, $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_2BC_2 = \angle ABC$ (см. рис. 13*в*).

№ 876. *Дано:* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед. $M \in CC_1$; $N \in AD$; $K \in BB_1$ (рис. 14).

Построить: MNK – сечение.

Построение: Возможны два случая:

I. 1) Соединим точки K и M, $KM \parallel BC$;
   2) $AD \parallel BC$; $KM \parallel AD \Rightarrow KM \parallel AD$ (точка $N \in$ AD);
   3) Соединим K с A и M с D;
   4) $AKMD$ –искомое сечение.

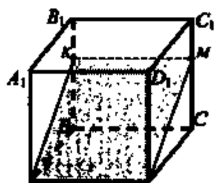


Рис. 14 (I)

II. 1) $KM \cap BC$ в точке L;
   2) Через точку N проведем прямую $a \parallel KM$;
   3) $a \cap AA_1$ в точке P;
   4) Соединим точу K и точку P;
   5) $NL \cap DC$ в точке K;
   6) $KPNRM$ – искомое сечение.

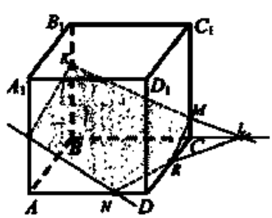


Рис. 14 (II)

IV. Подведение итогов

Домашнее задание

П. 1–9. № 87*а*, 46, 93.

Вопросы № 9–16 (стр. 31–32).

Урок 15. Контрольная работа по теме «Аксиомы стереометрии. Взаимное расположение прямых, прямой и плоскости»

Цель урока:

– проконтролировать знания, умения и навыки по данной теме.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Контрольная работа (см. приложение)

I уровень

Ответы к задачам:

№ 1. да. № 2. б) 6 см. № 3. б) 45°.	№ 1. да. № 2. б) 8 см. № 3 б) 60°.

II уровень

Ответы к задачам:

№ 1 а) да; б) нет; в) да. № 2 б) 6 см; 10 см. № 3 б) 50°.	№ 1 а) нет; б) да; в) да. № 2 б) 6 см; 10 см. № 3 б) 45°.

III уровень

Ответы к задачам:

№ 1 а) нет; б) да; в) нет. № 2 б) 28 см. № 3 в) 90°.	№ 1 а) да; б) да; в) нет. № 2 б) 12 см. № 3 б) 60°.

III. Подведение итогов

Домашнее задание

П. 1–9, прорешать задачу из контрольной работы № 1 (поменяться вариантами).

Решение заданий контрольной работы № 1.

I уровень

Вариант I

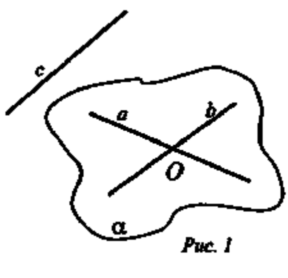


Рис. 1

№ 1. *Дано*: $a \cap b$ в точке O, a и c скрещивающиеся (рис. 1).

Могут ли прямые b и c быть параллельными?

Решение:

1. Через $a \cap b$ в точке О проведем плоскость α (по теореме п. 3, стр. 7).
2. a и c – скрещивающиеся, значит, $c \notin \alpha$.
3. Прямые b и c могут быть параллельными.

(*Ответ*: да.)

№ 2. Дано: $ABCD$ – трапеция; α – плоскость; $\alpha \cap AB$ в точке M; $\alpha \cap CD$ в точке N; $AM = MB$; $CN = ND$; $MN = 8$ см; $AD = 10$ см (рис. 2).

а) *Доказать:* $AD \parallel \alpha$.

б) *Найти:* BC.

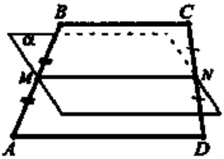


Рис. 2

Доказательство: а) $MN \in \alpha$; MN – средняя линия трапеции $ABCD$; $MN \parallel BC$ и $MN \parallel AD$ по свойству средней линии. Значит, $AD \parallel \alpha$.

Решение: б) $MN = \frac{1}{2}(BC + AD) \Rightarrow BC = 2MN - AD = 16 - 10 = 6$ (см).

(*Ответ:* а) $AD \parallel \alpha$; б) $BC = 6$ см.)

№ 3. Дано: $ABCD$ – квадрат; MA – прямая; $MA \notin (ABCD)$ (рис. 3).

Доказать: MA и BC – скрещивающиеся.

Найти: угол между прямыми MA и BC, если $\angle MAD = 45°$.

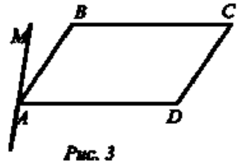


Рис. 3

Доказательство: $MA \notin (ABCD)$, $BC \in (ABCD)$, $MA \cap (ABCD)$ в точке $A \notin BC$. Значит, MA и BC – скрещивающиеся.

Решение: $BC \parallel AD$ – как противолежащие стороны квадрата, значит, угол между прямыми MA и BC будет $\angle MAD = 45°$ по условию.

(*Ответ:* а) MA и BC – скрещивающиеся; б) угол между прямыми MA и BC равен $45°$.)

Вариант II

№ 1. Дано: $a \cap b$ в точке O; $a \parallel c$ (рис. 4).

Могут ли прямые b и c быть скрещивающимися?

Решение:

1. Через $a \cap b$ в точке O проведем плоскость α, (по теореме п. 3).
2. $a \parallel c$ – по условию, значит, если $c \in \alpha$, то $b \cap c$, а если $c \notin \alpha$, то b и c – скрещивающиеся.

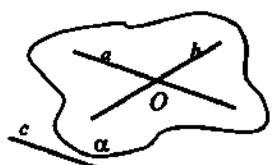


Рис. 4

(*Ответ:* могут.)

№ 2. Дано: $ABCD$ – трапеция, α – плоскость, $\alpha \cap (ABCD)$ по прямой AD, то есть $AD \in \alpha$, точка M – середина AB, точка N – середина CD (рис. 5).

а) *Доказать:* $MN \parallel \alpha$.

б) *Найти:* AD, если $BC = 4$ см, $MN = 6$ см.

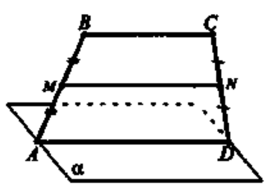


Рис. 5

Доказательство: а) 1. MN – средняя линия трапеции $ABCD$, значит, $MN \parallel BC$ и $MN \parallel AD$. 2. Так как $AD \in \alpha$ по условию, то $MN \parallel \alpha$.

Решение: б) $MN = \frac{1}{2}(BC + AD) \Rightarrow AD = 2MN - BC = 2 \cdot 6 - 4 = 12 - 4 = 8$ (см).

(*Ответ:* а) $MN \parallel \alpha$; б) $AD = 8$ см.)

№ 3. Дано: ΔABC; CD – прямая; $CD \notin (ABC)$; точка E – середина AB, точка F – середина BC (рис. 6).

а) *Доказать:* CD и EF – скрещивающиеся.

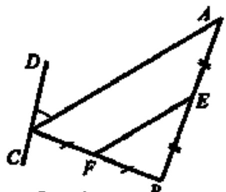


Рис. 6

б) *Найти*: угол между прямыми CD и EF, если $\angle DCA = 60°$.

Доказательство: EF – средняя линия ΔABC, $EF \in (ABC)$, $CD \notin (ABC)$, $CD \cap (ABC)$ в точке C, значит, CD и EF – скрещивающиеся прямые.

Решение: $EF \parallel CA$ – по свойству средней линии ΔABC, значит, угол между прямыми CD и EF будет считаться угол между прямыми DC и CA, то есть $\angle DCA$, который равен 60°.

(*Ответ*: а) CD и EF – скрещивающиеся; б) угол между прямыми CD и EF равен 60°.)

II уровень

Вариант I

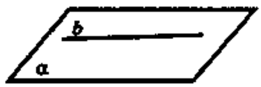


Рис. 7

№ 1. *Дано*: α – плоскость, $a \parallel \alpha$, $a \notin \alpha$, $b \in \alpha$ (рис. 7).

Определите, могут ли прямые: а) быть параллельными; б) пересекаться; в) быть скрещивающимися.

Решение:

а) $a \notin \alpha$, $a \parallel \alpha$, $b \in \alpha$, значит, a и b могут быть параллельными;

б) $a \parallel \alpha$, $b \in \alpha$, значит, a и b не могут пересекаться;

в) $a \notin \alpha$, $b \in \alpha$, значит, a и b могут быть скрещивающимися.

(*Ответ*: а) да; б) нет; в) да.)

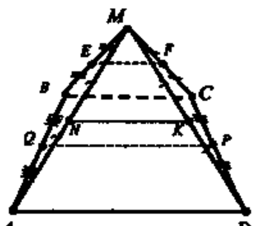


Рис. 8

№ 2. *Дано*: $ABCD$ – трапеция, ($AD \parallel BC$); точка $M \notin (ABCD)$; QP – средняя линия трапеции; NK – средняя линия ΔAMD; EF – средняя линия ΔBMC; $QP = 16$ см; $AD : BC = 5 : 3$ (рис. 8).

а) *Доказать*: $EF \parallel NK$.

б) *Найти*: EF; NK.

Доказательство:

1) $EF \parallel BC$ и $NK \parallel AD$ – по свойству средней линии треугольника;

2) $AD \parallel BC$ – по условию, значит $EF \parallel NK$.

Решение: Пусть x – коэффициент пропорциональности k, тогда $AD = 5x$, $BC = 3x$. Так как $QP = \frac{1}{2}(BC + AD)$ – по свойству средней линии трапеции, то составим и решим уравнение. $16 = \frac{1}{2}(3x + 5x)$; $32 = 8x$; $x = 4$, значит, $k = 4$, тогда $AD = 20$ см, $BC = 12$ см. Тогда $NK = \frac{1}{2}AD = 10$ (см), $EF = \frac{1}{2}BC = 6$ (см).

(*Ответ*: а) $EF \parallel NK$; б) 10 см; 6 см.)

№ 3. Дано: $ABCD$ – квадрат; $KA \notin (ABCD)$; $KA \cap (ABCD)$ в точке A. $\angle AKB = 85°$, $\angle ABK = 45°$ (рис. 9).

а) *Доказать*: KA и CD – скрещивающиеся.

б) *Найти*: угол между прямыми KA и CD.

Доказательство: $CD \in (ABCD)$, $KA \notin (ABCD)$ – по условию и $KA \cap (ABCD)$ в точке $A \notin CD$, тогда KA и CD – скрещивающиеся.

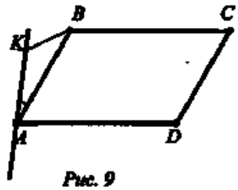


Рис. 9

Решение:

1) $CD \parallel AB$, $CD = AB$, $KA \cap BA$ в точке A, значит, углом между прямыми KA и CD будет являться $\angle KAB$.
2) Так как $\angle AKB = 85°$, $\angle ABK = 45°$, то $\angle KAB = 180° - (\angle AKB + \angle ABK) = 180° - (85° + 45°) = 50°$.

(*Ответ*: а) KA и CD – скрещивающиеся; б) угол между прямыми KA и CD равен $50°$.)

Вариант II

№ 1. Дано: α – плоскость, $a \parallel \alpha$, $b \cap \alpha$ в точке O (рис. 10).

Определите, могут ли прямые a и b: а) быть параллельными; б) пересекаться; в) быть скрещивающимися.

Решение:

а) Так как $a \parallel \alpha$, $b \cap \alpha$ в точке O, то a и b не могут быть параллельными;

б) $b \cap \alpha$ в точке O; $a \parallel \alpha$, тогда a и b могут пересекаться;

в) $a \parallel \alpha$, $b \cap \alpha$ в точке O, значит, a и b могут быть скрещивающимися.

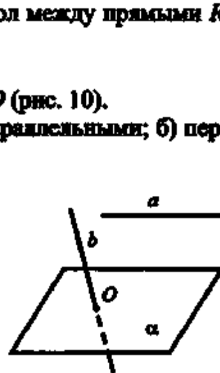


Рис. 10

(*Ответ*: а) нет; б) да; в) да.)

№ 2. Дано: ΔABC, $\Delta KMNP$ – трапеция; $KP \parallel MN$; EF – средняя линия ΔABC и трапеции $KMNP$. $KP : MN = 3 : 5$, $AC = 16$ см (рис. 11).

а) *Доказать*: $AC \parallel KP$.

б) *Найти*: KP и MN.

Доказательство: $EF \parallel AC$ – по свойству средней линии ΔABC; $EF \parallel KP$ – по свойству средней трапеции $KMNP$. Значит, $AC \parallel KP$.

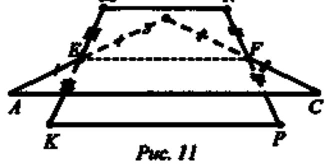


Рис. 11

Решение:

1. $EF = \dfrac{1}{2} AC = \dfrac{1}{2} \cdot 16 = 8$ (см);
2. Пусть k – коэффициент пропорциональности, тогда $KP = 3k$, $MN = 5k$.
$EF = \dfrac{1}{2}(KP + MN)$; $2EF = KP + MN$; $2 \cdot 8 = 3k + 5k$; $16 = 8k$; $k = 2$,
значит, $KP = 3k = 3 \cdot 2 = 6$ (см), $MN = 5k = 5 \cdot 2 = 10$ (см).

(*Ответ*: а) $AC \parallel KP$; б) $KP = 6$ см; $MN = 10$ см.)

№ 3. Дано: $ABCD$ – ромб; точка $M \notin (ABCD)$; MC – прямая; $MC \cap (ABCD)$ в точке C (рис. 12).

а) *Доказать*: MC и AD – скрещивающиеся.

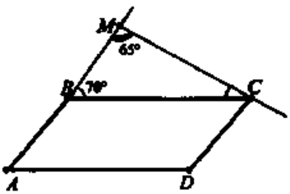


Рис. 12

б) *Найти*: угол между MC и AD, если $\angle MBC = 70°$, $\angle BMC = 65°$.

Доказательство: $MC \notin (ABCD)$, $MC \cap (ABCD)$ в точке C, $AD \in (ABCD)$, значит, MC и AD – скрещивающиеся прямые.

Решение:

1. $AD \parallel BC$ – как противолежащие стороны ромба; $BC \cap MC$ в точке C, значит, углом между прямыми MC и AD будет считаться $\angle MCB$.
2. $\angle MCB = 180° - (\angle MBC + \angle BMC) = 180° - (70° + 65°) = 180° - 135° = 45°$.

(*Ответ*: а) MC и AD – скрещивающиеся; б) угол между MC и AD равен 45°.)

III уровень

Вариант I

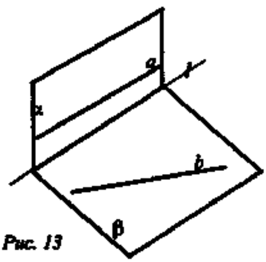


Рис. 13

№ 1. *Дано*: α и β – плоскость, $\alpha \cap \beta$ по прямой l, $a \parallel l$; a и b – скрещивающиеся (рис. 13.).

Определите, могут ли прямые a и b: а) лежать в одной плоскости; б) лежать в разных плоскостях α и β; в) пересекать плоскости α и β.

Решение:

а) Так как a и b – скрещивающиеся, то они лежат в разных плоскостях; не могут лежать в одной плоскости.

б) Так как a и b – скрещивающиеся, то они могут лежать только в разных плоскостях.

в) Если прямая $a \cap \alpha$, то $a \cap l$ – что противоречит условию $a \parallel l$, если прямая $a \cap \beta$, то $a \cap l$ – что противоречит условию $a \parallel l$; прямая b может пересекать плоскость α., не пересекает плоскость β.

(*Ответ*: а) нет; б) да; в) нет.)

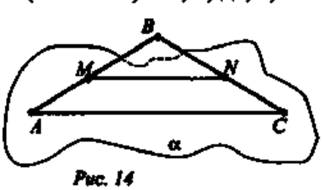


Рис. 14

№ 2. *Дано*: ΔABC; α – плоскость; $\alpha \cap (ABC)$ по прямой MN; $M \in AB$; $N \in BC$; $AM : MB = 3 : 4$; $CN : BC = 3 : 7$; $MN = 16$ см (рис. 14).

а) *Доказать*: $AC \parallel \alpha$.

б) *Найти*: AC.

Доказательство: Рассмотрим ΔABC и ΔMBN. У них: а) $\angle B$ – общий; б) $\frac{MB}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{4}{7}$. Значит, $\Delta ABC \sim \Delta MBN$ $\Rightarrow \angle BMN = \angle BAC$ и $\angle BNM = \angle BCA$ – и они соответственные при прямых MN и AC; AB и BC – секущие, значит, $MN \parallel AC$. $MN \in \alpha \Rightarrow AC \parallel \alpha$.

Решение:

Из $\Delta ABC \sim \Delta MBN$ $\Rightarrow$ $MN : AC = 4 : 7$; $AC = \frac{7 \cdot MN}{4} = \frac{7 \cdot 16}{4} = 28$ (см).

(*Ответ*: а) $AC \parallel \alpha$; б) $AC = 28$ см.)

№ 3. *Дано*: *A*, *B*, *C* и *D* – не лежат в одной плоскости. $AC = 6$ см; $BD = 8$ см. Расстояние между серединами отрезков *AD* и *BC* равно 5 см (рис. 15).

Найти: угол между прямыми *AC* и *BD*.

Решение:

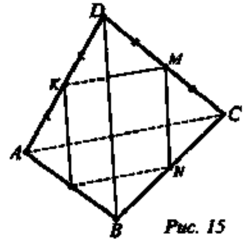


Рис. 15

1. Отметим точку *K* – середину *AD*, *N* – середину *BC*. Проведем $KM \parallel BD$, тогда углом между прямыми *AC* и *BD* будем считать $\angle KMN$.
2. $KM = \frac{1}{2}AC = 3$ см; $MN = \frac{1}{2}BD = 4$ см; $KN = 5$ см (как расстояние между прямыми *AD* и *BC*).
3. Получили ΔKMN со сторонами 3 см, 4 см, 5 см – это египетский треугольник. Значит, $\angle KMN = 90°$.

(*Ответ*: 90°.)

Вариант II

№ 1. *Дано*: α и β по прямой *l*; $l \cap a$ в точке *A*, $l \parallel b$ (рис. 16).

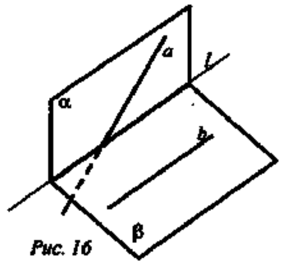


Рис. 16

Определите, могут ли прямые *a* и *b*: а) лежать в одной из данных плоскостей; б) лежать в разных плоскостях α и β; в) пересекать плоскости α и β.

Решение:

а) $b \parallel l$, значит, $b \parallel \alpha$ и $b \parallel \beta$; $a \cap l$, значит, *a* может пересекать либо α и лежать в β, либо пересекать β и лежать в α. Поэтому *a* и *b* могут лежать в одной из данных плоскостей;

б) *a* и *b* могут лежать в разных плоскостях α и β;

в) $b \parallel l \Rightarrow b$ не может пересекать ни α, ни β. А прямая $a \cap l$, поэтому может пересекать либо α, либо β.

(*Ответ*: а) да; б) да; в) нет.)

№ 2. *Дано*: ΔABC; α – плоскость; $AC \in \alpha$; *l* – прямая $AB \cap l$ в точке *M*; $BC \cap l$ в точке *N*; $BN : NC = 2 : 3$, $AM : AB = 3 : 5$; $AC = 30$ см (рис. 17).

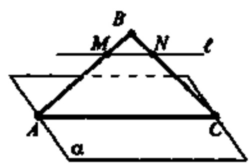


Рис. 17

а) *Доказать*: $MN \parallel \alpha$.

б) *Найти*: *MN*.

Доказательство: Рассмотрим ΔMBN и ΔABC.

У них: а) $\angle B$ – общий; б) $\frac{AB}{MB} = \frac{CB}{NB} = \frac{5}{2}$. Значит, $\Delta MBN \sim \Delta ABC$. Из этого следует, что $\angle BMN = \angle BAC$ и $\angle BNM = \angle BCA$ – они являются соответственными при прямых *MN* и *AC* и секущих *AB* и *BC*. Значит, $MN \parallel AC$; $AC \in \alpha \Rightarrow MN \parallel \alpha$.

Решение: Из $\Delta MBN \sim \Delta ABC \Rightarrow AC : MN = \frac{5}{2} \Rightarrow MN = \frac{2AC}{5} = \frac{2 \cdot 30}{5} = 12$ (см).

(*Ответ*: а) $MN \parallel \alpha$; б) $MN = 12$ см.)

№ 3. *Дано*: A, *B*, *C*, *D* – не лежат в одной плоскости. $AB = CD = 6$ см. Расстояние между серединами отрезков *AB* и $BC = 3$ см (рис. 18).

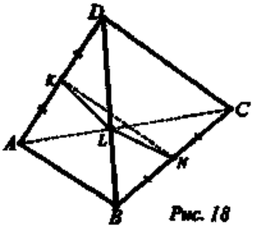


Рис. 18

Найти: угол между прямыми AB и CD.

Решение:

1. Отметим точку K – середину AD и точку N середину BC. Проведем $KL \parallel AB$; $LN \parallel DC$, тогда углом между прямыми AB и CD будем считать $\angle KLN$.
2. $KL \parallel AB$ и $KL = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\cdot 6 = 3$ (см); $LN = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}\cdot 6 = 3$ (см). $KN = 3$ (см) как расстояние между серединами отрезков AD и BC.
3. Получим ΔKLM – равносторонний, значит, $\angle KLN = 60°$.

(*Ответ*: 60°.)

§ 3. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ (уроки 16–17)

Урок 16. Параллельные плоскости

Цели урока:

1) ввести понятие параллельных плоскостей;
2) доказать признак параллельности двух плоскостей;
3) сформировать у учащихся навыки применения этого признака при решении задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока и сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

Анализ контрольной работы.

1. Подвести итоги контрольной работы.
2. Анализ ошибок, допущенных в работах.

Подготовка учащихся к восприятию нового материал.

- Сформулировать A_3.
- Сформулировать утверждение 1° п. 6.
- Признаки подобия треугольников.
- Теорема об отношениях площадей подобных треугольников.
- Свойство средней линии треугольника.

Рис. 1

$\frac{S_{ABC}}{S_{MNK}} = ?$ $\frac{S_{ABC}}{S_{MNK}} = ?$

III. Изучение нового материала

1. Определение параллельных плоскостей.
2. По аксиоме 3 плоскости пересекаются по прямой. Но возможен еще один случай взаимного расположения двух плоскостей, если они не имеют общей точки.

На доске схема

В тетрадях учащихся и на доске рисунки и записи.

Рис. 2

$\alpha \cap \beta = a$ $\alpha \parallel \beta$

3. Признак параллельности плоскостей.

Дано: $\alpha \cap \beta = M$, $a \in \alpha$, $b \in \alpha$. $a_1 \cap b_1$, $a_1 \in \beta$, $b_1 \in \beta$. $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$ (рис. 3).

Доказать: $\alpha \parallel \beta$.

Доказательство: От противного. Пусть $\alpha \cap \beta = c$,

1) Тогда $a \parallel \beta$, $a \subset \alpha$, $\alpha \cap \beta = c$, значит, $a \parallel c$ (по утверждению 1° п. 6).
2) $b \parallel \beta$, $b \subset \alpha$, $\alpha \cap \beta = c$, значит, $b \parallel c$.
3) Имеем $a \parallel b$, то есть через точку M проходят две прямые a и b, параллельные прямой c. Получили противоречие. Значит, $\alpha \parallel \beta$.

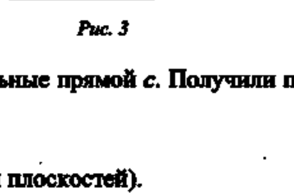


Рис. 3

IV. Закрепление изученного материала

№ 51. (еще один признак параллельности плоскостей).

Дано: $m \cap n = K$, $m \in \alpha$, $n \in \alpha$, $m \parallel \beta$, $n \parallel \beta$ (рис. 4).

Доказать: $\alpha \parallel \beta$.

Доказательство: Допустим, что α и β не параллельны. Тогда они пересекаются по некоторой прямой c. Так как $m \parallel \beta$, $n \parallel \beta$, то по утверждению 1° $m \parallel c$, $n \parallel c$. Получаем, что через точку K проходят две прямые, параллельные прямой c, что невозможно по теореме о параллельных прямых. Получили противоречие. Значит, $\alpha \parallel \beta$.

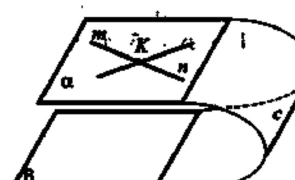


Рис. 4

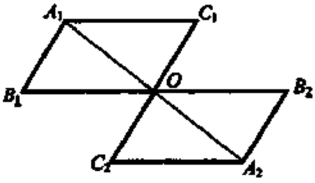


Рис. 5

№ 53. *Дано*: отрезки A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 не лежат в одной плоскости и имеет общую середину – точку O (рис. 5).

Доказать: $A_1B_1C_1 \parallel A_2B_2C_2$.

Доказательство:

1) A_1A_2 и B_1B_2 лежат в одной плоскости по следствию из A_1 (через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна). $A_1B_1A_2B_2$ – параллелограмм (диагонали четырехугольника пересекаются и в точке пересечения делятся пополам). Следовательно, $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.
2) Аналогично A_1A_2 и C_1C_2 лежат в одной плоскости. $A_1C_1A_2C_2$ – параллелограмм. Отсюда, $A_1C_1 \parallel A_2C_2$.
3) $B_1A_1 \cap A_1C_1 = A_1$; $B_2A_2 \cap A_2C_2 = A_2$.

По признаку параллельности плоскостей $A_1B_1C_1 \parallel A_2B_2C_2$.

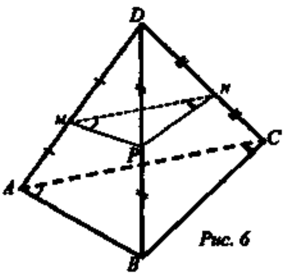


Рис. 6

№ 54. *Дано*: ΔADC. $B \notin ADC$. M, N, P – середины BA, BC, BD соответственно. $S_{ADC} = 48$ см^2 (рис. 6).

Доказать: а) $MPN \parallel ADC$.

б) *Найти*: S_{MNP}.

Решение:

а) В ΔABD : MP – средняя линия, $MP \parallel AD$. В ΔBCD : PN – средняя линия $PN \parallel DC$. $MP \cap PN = P$, $AD \cap DC = D$. По признаку параллельности двух плоскостей $(MNP) \parallel (ADC)$. Что и требовалось доказать.

б) $\angle NMP = \angle CAD$, $\angle MNP = \angle ACD$ как углы с сонаправленными сторонами, поэтому $\Delta MPN \sim \Delta ADC$ по двум углам. $\dfrac{S_{MPN}}{S_{ADC}} = \left(\dfrac{MN}{AC}\right)^2$ (по теореме об отношениях площадей подобных треугольников). $\dfrac{MN}{AC} = \dfrac{1}{2}$ (по свойству средней линии треугольника) $\dfrac{S_{MPN}}{48} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$, $4S_{MPN} = 48$, $S_{MPN} = 48 : 4 = 12$ (см^2). (*Ответ*: 12 см^2.)

V. Подведение итогов (в форме текста)

1. Могут ли прямая и плоскость не иметь общих точек?
2. Верно ли, что если две прямые не пересекаются, то они параллельны?
3. Плоскости α и β параллельны, прямая m лежит в плоскости α. Верно ли, что прямая m параллельна плоскости β?
4. Верно ли, что если прямая a параллельна одной из двух параллельных плоскостей, с другой плоскостью прямая a имеет только одну общую точку?
5. Боковые стороны трапеции параллельны плоскости α и плоскости трапеции?

6. Верно ли, что плоскости параллельны, если прямая, лежащая в одной плоскости, параллельна другой плоскости?
7. Верно ли, что линия пересечения двух плоскостей параллельна одной из этих плоскостей?
8. Верно ли, что любые четыре точки лежат в одной плоскости?
9. Верно ли, что если две стороны треугольника параллельны плоскости α, то и третья сторона параллельна плоскости α?

№ вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ответ	да	нет	да	нет	да	нет	нет	нет	да

Домашнее задание

П. 10, № 55, 56, 57.

Задача 56

Дано: $\alpha \parallel \beta$, $A \in \alpha$, $A \in a$, $a \parallel \alpha$ (рис. 7).

Доказать: $a \subset \alpha$.

Решение: Мы знаем, что если некоторая прямая a пересекает плоскость α, то она пересекает также любую плоскость, параллельную α. Если a не параллельна β, то она пересекает β, а значит, и плоскость α, а по условию $a \parallel \beta$. Значит, a не может пересекать плоскость α и, так как она имеет с плоскостью α общую точку A, то $a \subset \alpha$.

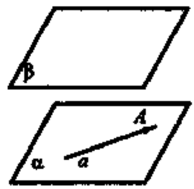


Рис. 7

Задача 55

Записать в тетрадь и разобрать решение задачи, приведенное в учебнике.

Задача 57

Дано: $\alpha \parallel \beta$, $a \parallel \alpha$.

Доказать: $a \parallel \beta$ или $a \subset \beta$.

Решение: Пусть a не параллельна β, тогда она пересекает β, а значит, пересекает α (задача 55 решена в учебнике). Значит, предположение неверно, то есть или $a \parallel \beta$, или $a \subset \beta$.

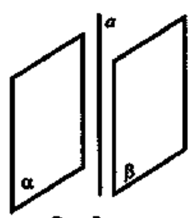


Рис. 8

Урок 17. Свойства параллельных плоскостей

Цели урока:

1) рассмотреть свойства параллельных плоскостей;
2) сформировать навык применения изученных свойств параллельных плоскостей при решении задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

Теоретический опрос

а) Один ученик готовит у доски доказательство признака параллельности двух плоскостей.

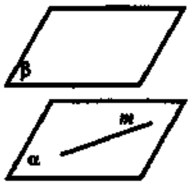


Рис. 1

б) Другой записывает на доске решение домашней задачи № 55.

в) Двое учащихся решают по карточкам индивидуального опроса.

1. Плоскости α и β параллельны, прямая m параллельна плоскости β.

Дано: $\alpha \parallel \beta$, $m \subset \alpha$ (рис. 1).

Доказать: что $m \parallel \beta$.

Решение:

1) Пусть m не параллельна β. $m \cap \beta = K$, $K \in \beta$.

2) $\left.\begin{array}{l} K \in \beta \\ K \in \alpha \\ \text{т.к. } m \in \alpha \end{array}\right| \Rightarrow \alpha \cap \beta.$ Получили противоречие условию $\alpha \parallel \beta$. Следовательно, $m \parallel \beta$. Что и требовалось доказать.

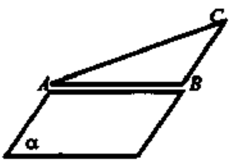


Рис. 2

2. Две стороны треугольника параллельны плоскости α. Докажите, что и третья сторона параллельна плоскости α.

Дано: ΔABC, $AB \parallel \alpha$, $BC \parallel \alpha$. (рис. 2).

Доказать: $AC \parallel \alpha$.

Решение: Если две пересекающиеся прямые плоскости ABC параллельны плоскости α, то $(ABC) \parallel \alpha$. Так как $AC \subset (ABC)$, а $(ABC) \parallel \alpha$, то $AC \parallel \alpha$. Что и требовалось доказать.

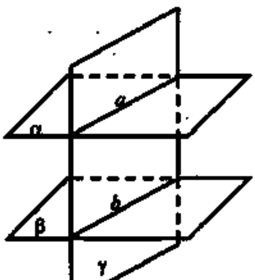


Рис. 3

г) ***Фронтальный теоретический опрос***

– сформулируйте определение параллельных плоскостей;
– укажите модели параллельных плоскостей на предметах классной обстановки;
– сформулируйте признак параллельности плоскостей.

Выслушивается доказательство теоремы и решение задачи № 55.

III. Изучение нового материала

1. Рассмотреть свойства параллельных плоскостей.

1. *Дано*: $\alpha \parallel \beta$, $\gamma \cap \alpha = a$, $\gamma \cap \beta = b$ (рис. 3).

Доказать: $a \parallel b$.

Доказательство: Предположим, что $a \cap b$. Тогда α и β имели бы общую точку, что невозможно, так как $\alpha \parallel \beta$ по условию. Итак, a и b лежат в одной плоскости γ и не пересекаются. Значит, $a \parallel b$. Свойство доказано.

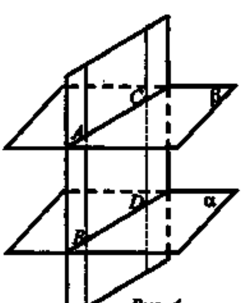


Рис. 4

2. *Дано*: $AB \parallel CD$, $\alpha \parallel \beta$ (рис. 4).

Доказать: $AB = CD$.

Доказательство:

1) $\left.\begin{matrix} \gamma \cap \alpha, \gamma \cap \beta \\ \alpha \parallel \beta \end{matrix}\right| \Rightarrow$ по свойству 1° $AC \parallel BD$.

2) В четырехугольнике $ABCD$ $\left.\begin{matrix} AC \parallel BD \\ AB \parallel CD \end{matrix}\right| \Rightarrow ABCD$ – параллелограмм

В параллелограмме противоположные стороны равны. Значит, $AB = CD$. Что и требовалось доказать.

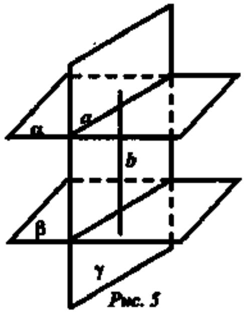


Рис. 5

IV. Закрепление изученного материала

1. Решение задачи 58

Дано: $\alpha \parallel \beta$, α пересекается с γ (рис. 5).

Доказать, что β пересекается с γ.

Решение: Пусть γ пересекает α по прямой a. Проведем в плоскости γ прямую b, пересекающую a. Прямая b пересекает α, поэтому она пересекает параллельную ей плоскость β (задача № 55). Следовательно, и плоскость γ, в которой лежит прямая b, пересекает плоскость β.

2. *Задача 63б*

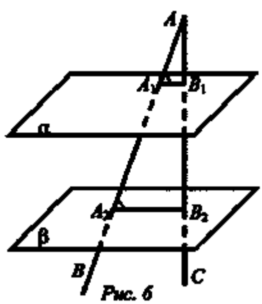


Рис. 6

Дано: $\alpha \parallel \beta$, $\angle BAC$. $\alpha \cap AB = A_1$, $\beta \cap AB = A_2$, $\alpha \cap AC = B_1$, $\beta \cap AC = B_2$, $A_1B_1 = 18$ см, $AA_1 = 24$ см, $AA_2 = \frac{3}{2}A_1A_2$ (рис. 6).

Найти: A_2B_2, AA_2.

Решение:

1. $(BAC) \cap \alpha = A_1B_1$, $(BAC) \cap \beta = A_2B_2$. Так как $\alpha \parallel \beta$, по свойству 1° параллельных плоскостей $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.
2. В (BAC) $\Delta A_1AB \sim \Delta A_2AB_2$ (по двум углам: $\angle A$– общий, $\angle AA_1B_1 = \angle AA_2B_2$ как соот- ветственные при параллельных прямых A_1B_1 и A_2B_2 и секущей AB). Из подобия треугольников следует, что $\frac{AA_2}{AA_1} = \frac{A_2B_2}{A_1B_1}$, $AA_2 = AA_1 + A_1A_2 = 24 + A_1A_2$, $24 + A_1A_2 = \frac{3}{2}A_1A_2$, $\frac{1}{2}A_1A_2 = 24$, $A_1A_2 = 24 \cdot 2 = 48$ (см); $AA_2 = 48 + 24 = 72$ (см); $\frac{72}{24} = \frac{A_2B_2}{18}$,

$A_2B_2 = \frac{72 \cdot 18}{24} = 54$ (см).

(*Ответ*: 54 см $= A_2B_2$, $AA_2 = 72$ см.)

V. Самостоятельная работа

(см. приложение)

VI. Подведение итогов

Домашнее задание

П. 11 пов., п. 10. № 59, 63*а*, 64.

Дополнительная задача

Прямая a параллельна плоскости α. Существует ли плоскость, проходящая через прямую a и параллельная плоскости α? Если существует, то сколько таких плоскостей? Ответ обоснуйте.

Решение дополнительной задачи.

Да, существует; такая плоскость только одна. Выберем на прямой $a \parallel \alpha$ произвольную точку A. Тогда через точку A можно провести единственную плоскость, параллельную α (задача 59 решена в учебнике).

Пусть через прямую a можно провести другую плоскость β; $\alpha \parallel \beta$. Тогда через произвольную точку $A \subset a$ проходят сразу две плоскости. А это противоречит доказанному утверждению.

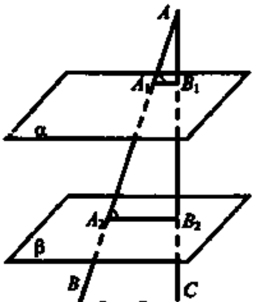


Рис. 7

Задача 63а

Дано: $\alpha \parallel \beta$, $\angle BAC$, $\alpha \cap AB = A_1$, $\beta \cap AB = A_2$, $\alpha \cap AC = B_1$, $\beta \cap AB = B_2$, $A_1A_2 = 2A_1A = 12$ см, $AB_1 = 5$ см (рис. 7).

Найти: AA_2 и AB_2.

Решение: $\alpha \parallel \beta$ (BAC) пересекает α и β. По свойству параллельных плоскостей $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ (п. 11, 1°). (BAC): $\Delta A_1AB_1 \sim \Delta A_2AB_2$ (по двум углам, $\angle A$ – общий, $\angle AA_1B_1 = \angle AA_2B_2$ – соответственные при параллельных прямых A_1B_1 и A_2B_2 и секущей AB). Из подобия треугольников следует $\dfrac{AA_1}{AA_2} = \dfrac{AB_1}{AB_2}$; $A_1A_2 = 2A_1A = 12$ см, $12 \text{ см} = 2A_1A$, $A_1A = 6$ см; $AA_2 = A_1A + A_1A_2 = 6 + 12 = 18$(см); $\dfrac{6}{18} = \dfrac{5}{AB_2}$, $AB_2 = \dfrac{5 \cdot 18}{6} = 15$; $AB_2 = 15$ см. (*Ответ*: $AA_2 = 18$ см, $AB_2 = 15$ см.)

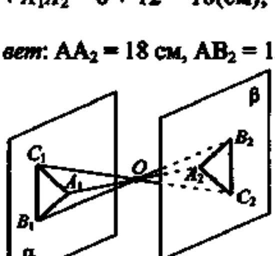


Рис. 8

Задача 64

Дано: $\alpha \parallel \beta$, A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекают α в точках A_1, B_1, C_1 соответственно, а β – A_2, B_2, C_2. A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 проходят через точку O и не лежат в одной плоскости (рис. 8).

Доказать: $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$.

Решение: Две пересекающиеся прямые единственным образом задают плоскость. $A_1A_2 \cap B_1B_2 = 0$. Они задают плоскость $(A_1B_1B_2)$. По свойству параллльных плоскостей (п. 11, 1°), $A_1B_1 \parallel A_2B_2$. Аналогично: $A_1C_1 \parallel A_2C_2$, $\Delta OA_1C_1 \sim \Delta OA_2C_2$ (рис. 9). ($\angle 1 = \angle 2$ – как вертикальные, $\angle 3 = \angle 4$ – как накрест лежащие);

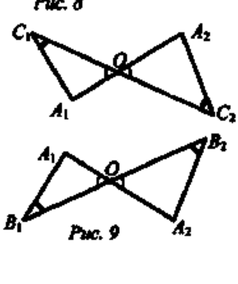


Рис. 9

$\dfrac{A_1C_1}{A_2C_2} = \dfrac{OA_1}{OA_2} = \dfrac{OC_1}{OC_2}$; (1) $\Delta OA_1B_1 \sim \Delta OA_2B_2$;

$\frac{A_1B_1}{A_2B_2}=\frac{OA_1}{OA_2}=\frac{OB_1}{OB_2}$; (2) $\Delta OB_1C_1 \sim \Delta OB_2C_2$; $\frac{B_1C_1}{B_2C_2}=\frac{OB_1}{OB_2}=\frac{OC_1}{OC_2}$; (3). Учитывая соотношения (1), (2), (3), получим $\frac{A_1C_1}{A_2C_2}=\frac{A_1B_1}{A_2B_2}=\frac{B_1C_1}{B_2C_2}$. Значит, $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$ по третьему признаку подобия (пропорциональность сторон).

§ 4. ТЕТРАЭДР. ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД (УРОКИ 18–24)

Урок 18. Тетраэдр

Цели урока:

1) повторить понятие многоугольника в планиметрии;
2) ввести понятие тетраэдра;
3) рассмотреть задачи, связанные с тетраэдром.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Проверка домашнего задания

1) Один ученик записывает на доске решение домашней задачи № 63а.

Дано: $\alpha \parallel \beta$, $\angle ABC$, $A_1 = \alpha \cap AB$, $A_2 = \beta \cap AB$, $B_1 = \alpha \cap AC$, $B_2 = \beta \cap AC$; $A_1A_2 = 2A_1A$, $A_1A_2 = 12$ см, $AB_1 = 5$ см. (рис. 1).

Найти: AA_2, AB_2.

Решение:

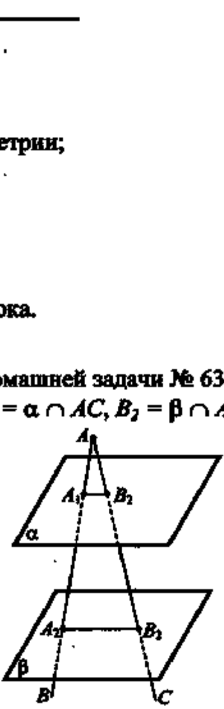


Рис. 1

1. $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ (по свойству 1° параллельных плоскостей).
2. $\Delta A_2AB_2 \sim \Delta A_1AB_1$; $\frac{A_1A}{AA_2}=\frac{AB_1}{AB_2}$.
3. Так как $A_1A_2 = 2\ A_1A$ и $A_1A_2 = 12$ см, то $A_1A = 12 : 2 = 6$ см.
4. $AA_2 = 12 + 6 = 18$ см.
5. $\frac{A_1A}{AA_2}=\frac{AB_1}{AB_2}$; $\frac{6}{18}=\frac{5}{AB_2}$, $AB_2 = 15$ см.

(*Ответ*: $AA_2 = 18$см, $AB_2 = 15$ см.)

2) Двое решают по карточкам индивидуального опроса.

I. Отрезки AB, AC и AD не лежат в одной плоскости. Точки K, M и N – соответственно их середины.

а) *Докажите*, что плоскости BCD и KMN параллельны.

б) *Найдите* площадь $\Delta BCД$, если $S_{KMN} = 36$ м^2.

(*Ответ*: $S_{BCD} = 144$ м^2.)

II. Три прямые, проходящие через точку M и не лежащие в одной плоскости, пересекают одну из параллельных плоскостей в точках A_1, B и C, а вторую – в точках A_1, B_1 и C_1.

а) *Докажите*, что $ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

б) *Найти* $\dfrac{AB}{A_1B_1}$, если $MC = CC_1$.

(*Ответ*: $\dfrac{1}{2}$.)

3) Остальные отвечают на вопросы (устно).

1) Каково взаимное расположение двух плоскостей, если третья плоскость пересекает их по прямым: а) имеющим общую точку; б) не имеющим общих точек?
2) Две стороны трапеции лежат в параллельных плоскостях. Могут ли эти стороны быть ее боковыми сторонами?
3) Каким может быть взаимное расположение двух прямых, если эти прямые пересекают две параллельные плоскости, и их отрезки, заключенные между плоскостями, не равны?
4) Две плоскости пересечены двумя параллельными прямыми. Выясните взаимное расположение этих плоскостей, если отрезки данных прямых, заключенные между этими плоскостями, не равны.
5) Прямая a пересекает параллельные плоскости α и β в точках A и B. Прямая b, параллельная прямой a, пересекает плоскости в точках D и C. Найдите периметр четырехугольника $ABCD$, если $AB = 3$ см, $BC = 4$ см.
6) Плоскости α и β параллельны, прямая m лежит в плоскости α. Докажите, что прямая m параллельна плоскости β.

III. Изучение нового материала

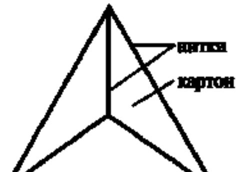


Рис. 2

Использовать модели нескольких тетраэдров, а также гибкую модель из картона и ниток (рис. 2).

1) Одна из глав нашего курса будет посвящена многогранникам – поверхностям геометрических тел, составленных из многоугольников. Познакомимся с одним из них сегодня на уроке – *тетраэдром*. Это даст нам возможность проиллюстрировать понятия, связанные со взаимным расположением прямых и плоскостей на примере геометрических тел.

Вспомним, прежде всего, что мы понимали под многоугольником в планиметрии. (Ответы).

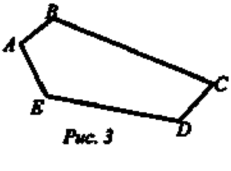


Рис. 3

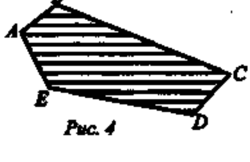


Рис. 4

Учитель обобщает ответы учащихся: многоугольник мы рассматривали либо как *замкнутую линию без самопересечений*, составленную из отрезков (рис. 3), либо как часть плоскости, ограниченную этой линией, включая ее саму (рис. 4).

При рассмотрении поверхностей и тел в пространстве будем пользоваться вторым толкованием многоугольника. При таком толковании любой многоугольник в пространстве представляет собой *плоскую поверхность*.

2) *Определение тетраэдра*. Построим ΔABC; точка D, не лежащая в плоскости этого треугольника. Соединив точку D отрезками с вершинами ΔABC, получим ΔDAB, ΔDBC, ΔDCA, получим тетраэдр.

Итак, поверхность, составленная из четырех треугольников ΔABC, ΔDAB, ΔDBC и ΔDCA, называется тетраэдром и обозначается: $DABC$.

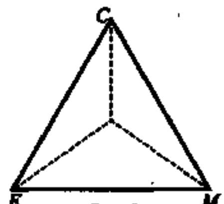


Рис. 5

Тетраэдр, то есть четырехгранник («тетра» – четыре, «эдр» – грань). (Показ моделей тетраэдров.)

3) Треугольники, из которых состоит тетраэдр, называются *гранями*, их стороны – *ребрами*, а вершины – *вершинами тетраэдра*. Тетраэдр имеет *четыре* грани, *шесть* ребер и *четыре* вершины.

Два ребра тетраэдра, не имеющие общих вершин, называются *противоположными*. На рис. 34 учебника AD и BC, BD и AC, CD и AB.

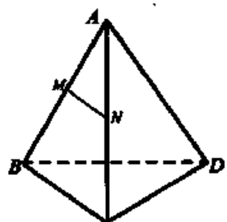


Рис. 6

Иногда выделяют одну из граней тетраэдра и называют ее *основанием*, а три другие – *боковыми гранями*.

4) *Изображение тетраэдра на плоскости* (рис. 5).

IV. Закрепление изученного материала

1) **№ 68** (устно) по готовому чертежу (рис. 6).

2) **№ 69.** *Дано*: S_{ABC} – тетраэдр, $MA = MB$, $BN = NC$, $M \in \alpha$, $N \in \alpha$, $BC \parallel \alpha$, $\alpha \cap (ABS) = PM$, $\alpha \cap (BCS) = KN$ (рис. 7).

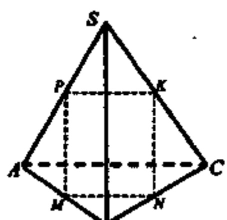


Рис. 7

Доказать: $PM \parallel KN$.

1. $\left.\begin{array}{l} BS \subset (BCS) \\ BS \parallel \alpha, (BCS \cap \alpha = KM) \end{array}\right| \Rightarrow BS \parallel KM$ (по свойству 1°).
2. $\left.\begin{array}{l} BS \subset (ABS) \\ BS \parallel \alpha, (ABS \cap \alpha = PM) \end{array}\right| \Rightarrow BS \parallel PM$ (по свойству 1°).
3. $BS \parallel KN$, $BS \parallel PM$, $KN \parallel PM$ (по теореме о параллельности трех прямых).

3) **№ 71б.** *Дано*: $DABC$ – тетраэдр, $M \in DB$, $N \in DC$, $K \in BC$ (рис. 8).

Построить: точку M_1.

Условие:

$M_1 = KN \cap (FBD)$.

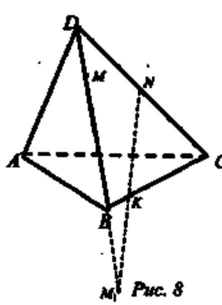


Рис. 8

Решение:

1. $NK \subset (DBC)$, $DB \subset (DBC)$.
2. NK не может быть параллельна прямой DB. Так как $NK \parallel (ADB)$ (по признаку) – это противоречит условию $\Rightarrow NK \cap DB$.
3. $DB \subset (ADB)$, то $NK \cap (ADB) = M_1$.

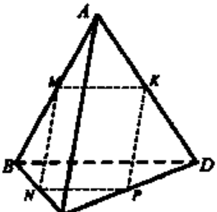


Рис. 9

4) № 73. *Дано*: $DABC$ – тетраэдр, $M \in AB$, $N \in BC$, $P \in CD$, $K \in AD$; $MA = MB$, $NB = NC$, $PC = PD$, $AC = 10$ см, $BD = 12$ см, $AK = KD$ (рис. 9).

Доказать: $K \in (MNP)$.

Найти: P_{MNPK}.

Решение:

1. $(MNP) \cap (ABC) = MN$, MN – средняя линия $\Delta ABC \Rightarrow MN \parallel AC$.
2. $MN \parallel (ACD)$ (по признаку параллельности прямой и плоскости), MN проходит через (MNP); $(MNP) \parallel (ACD)$. Значит, линия пересечения (MNP) и (ACD) параллельна MN.
3. Пусть эта линия пересекается с ребром AD в точке K. Так как $PK \parallel MN$ и $MN \parallel AC$, то $PK \parallel AC$, а так как P – середина AD, то PK – средняя линия ΔACD, то есть K – середина AD.
4. $MN = KP = \dfrac{1}{2} AC = 5$ см; $NP = MK = \dfrac{1}{2} BD = 6$ см; $P = 2 \cdot (5 + 6) = 22$ см.

(*Ответ*: 22 см.)

V. Подведение итогов

Домашнее задание

П. 12, I уровень: № 67(а), 70; II уровень: № 67, 71(а).

Урок 19. Параллелепипед

Цели урока:

1) ввести понятие параллелепипеда;
2) рассмотреть его свойства 1° и 2°;
3) решить задачи на применение свойств параллелепипеда.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний

Рис. 1

1) Двое учеников на доске записывают решение домашнего задания: № 67 – первый, № 70 – второй.

Задача 67

Дано: $DABC$ – тетраэдр, $\angle ADB = 54°$, $\angle BDC = 72°$, $\angle CDA = 90°$, $DA = 20$ см, $BD = 18$ см, $DC = 21$ см (рис. 1).

Найдите: а) AB; BC; б) S_{ADB}, S_{BDC}, S_{ADC}.

Решение:

а) 1. Из ΔADB ($\angle ADB = 54°$) по теореме косинусов; $AB^2 = AD^2 + DB^2 - 2 \cdot AD \cdot \cdot BD \cdot \cos 54° \approx 298$; $AB \approx 17$ см.

2. Из ΔBCD ($\angle BCD = 72°$); $BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2 \cdot BD \cdot CD \cdot \cos 72° \approx 529$; $BC \approx 23$ см.

3. Из ΔCDA ($\angle ADC = 90°$) по теореме Пифагора; $AC^2 = AD^2 + DC^2 = 20^2 + 21^2 = 841$; $AC = 29$ см; $S_\Delta = \dfrac{1}{2} a \cdot в \cdot \sin \alpha$.

б) $S_{ADB} = \dfrac{1}{2} AD \cdot BD \cdot \sin 54° \approx 146$ см^2; $S_{ADC} = \dfrac{1}{2} AD \cdot DC = 210$ см^2;

$S_{BDC} = \dfrac{1}{2} DC \cdot DB \cdot \sin 72° \approx 180$ см^2.

(*Ответ*: а) ≈ 17 см, ≈ 23 см, 29 см;
б) ≈ 146 см^2, ≈ 180 см^2, 210 см^2.)

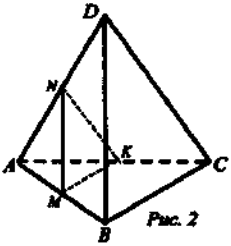


Рис. 2

Задача 70

Дано: $ABCD$ – тетраэдр, $AM = MB$, $AN = ND$, $AK = KC$ (рис. 2).

Доказать: $(MNK) \parallel (BCD)$.

Решение:

1. $MK \parallel BC$ (по свойству средней линии Δ).
2. $MN \parallel BD$ (по свойству средней линии Δ).

$$\left.\begin{array}{l} 3.\ MK \cap MN \\ 4.\ BC \cap BD \end{array}\right| \Rightarrow (MNK) \parallel (BCD)$$ (по признаку параллельности двух плоскостей).

2) Ученик решает задачу № 71 (а), объясняя вслух.

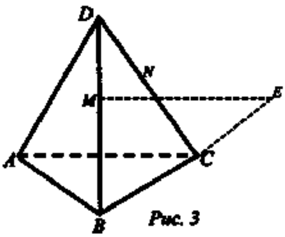


Рис. 3

Дано: $DABC$ – тетраэдр, $M \in DB$, $N \in DC$ (рис. 3).

Построить: точку E.

Условие: $MN \cap (ABC) = E$.

Решение:

1. $MN \cap (DCB)$;
2. $(DCB) \cap (ABC) = BC$;
3. Продолжим BC и MN, $BC \cap MN = E_1$; E – искомая точка.

3) Остальные устно решают задачи по готовым чертежам.

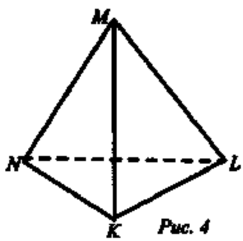
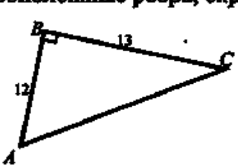


Рис. 4

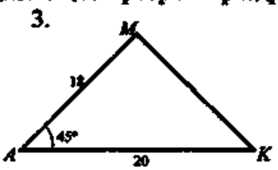
1. Укажите все грани, ребра, вершины, противоположные ребра, скрещивающиесяребра тетраэдра (рис. 4).

2.



$S_{\Delta ABC} = ?$

3.



$S_{\Delta AMK} = ?$

4. Что называется параллелограммом? Свойства параллелограмма? Признаки параллелограмма?

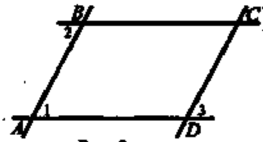


Рис. 5

Дано: $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ (рис. 5).

Доказать, что четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм.

Проверяется домашнее задание.

III. Изучение нового материала

1) *Понятие параллелепипеда.*

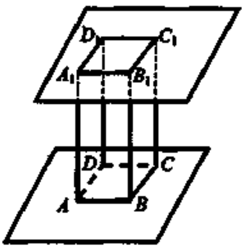


Рис. 6

Рассмотрим два равных параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, расположенных в параллельных плоскостях так, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 параллельны. Четырехугольники ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, DAA_1D_1 также являются параллелограммами, так как каждый из них имеет попарно параллельные противоположные стороны (например, в ABB_1A_1 стороны AA_1 и BB_1 параллельны по условию, а AB и A_1B_1 – по свойству линий пересечения двух параллельных плоскостей третьей).

Поверхность, составленная из двух равных параллелограммов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, лежащих в параллельных плоскостях и четырех параллелограммов, называется параллелепипедом и обозначается так: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 6).

2) *Элементы параллелепипеда.*

Параллелограммы, из которых составлен параллелепипед, называются *гранями*, их стороны – *ребрами*, а вершины – *вершинами* параллелепипеда.

Сколько граней имеет параллелепипед? ребер? вершин?

Две грани параллелепипеда, имеющие общее ребро, называются *смежными*, а не имеющие общих ребер – противоположными.

Две вершины, не принадлежащие одной грани, называются *противоположными*.

Отрезок, соединяющий противоположные вершины, называется диагональю параллелепипеда. Сколько диагоналей имеет параллелепипед?

Выделяют две противоположные грани и называют их *основаниями*, а остальные грани – *боковыми*.

Ребра параллелепипеда, не принадлежащие основаниям, называются *боковыми ребрами*.

2) Изображение (рис. 7).

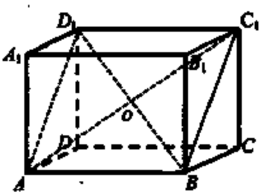


Рис. 7

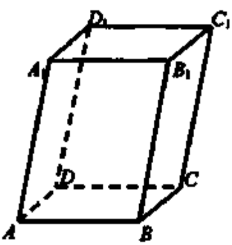


Рис. 8

3) Свойства параллелепипеда.

1° *Противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны.*

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед (рис. 8).

Доказать: а) $ABB_1A_1 \| DCC_1D_1$; б) $ABB_1A_1 = DCC_1D_1$.

Доказательство:

а) Так как $ABCD$ и ADD_1A_1 – параллелограммы, то $AB \| DC$, $AA_1 \| DD_1$.

Тогда $AB \cap AA_1$ одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым $DC \cap DD_1$ другой плоскости. Значит, $ABB_1A_1 \| DCC_1D_1$ (по признаку параллельности плоскости).

б) Так как все грани параллелепипеда – параллелограммы, то $AB = DC$, $AA_1 = DD_1$. По той же причине стороны (A_1ABB_1) и (D_1DCC_1) соответственно сонаправлены, значит, $\angle A_1AB = \angle D_1DC$. Таким образом $ABB_1A_1 = DCC_1D$.

2° *Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.*

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед (рис. 9).

Доказать: $AC_1 \cap BD_1 = O$, $AO = OC_1$, $OD_1 = BO$.

Доказательство:

Рассмотрим AD_1C_1B, $DC \| AB$, $D_1C_1 \| DC \Rightarrow$ $\Rightarrow AB \| D_1C_1$. $AB = DC$, $D_1C_1 = DC$, значит, $AB = D_1C_1 \Rightarrow AD_1C_1B$ – параллелограмм, а диагонали $AC_1 \cap BD_1 = O$ и $AO = OC_1$, $BO = OD_1$.

Аналогично рассматриваются следующие случаи для A_1D_1CB и A_1B_1CD. Вывод (устно).

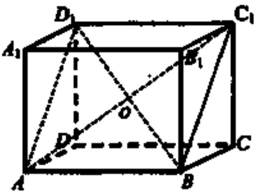


Рис. 9

IV. Закрепление изученного материала

1) (Устно) Укажите: а) вершины, не лежащие в плоскости ABC; б) грани, пересекающиеся в точке B; в) ребра, параллельные ребру CD; параллельные плоскости BCF.

2) (Устно) В параллелепипеде $ABCDEFGH$ диагонали BH и CE пересекаются в точке O, $BO = 3$ см, $CO = 5$ см (рис. 10).

Найдите BH и CE.

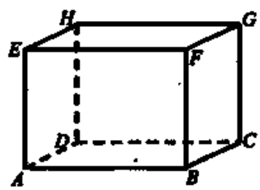


Рис. 10

3) № 77. *Дано*: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед; $\frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}; \frac{BC}{BB_1} = \frac{5}{6}$, $(AB + BC + BB_1) \cdot 4 = 120$ см (рис. 11).

Найти: AB, BC, BB_1.

Решение: x – коэффициент пропорциональности. Пусть $AB = 4x$, $BC = 5x$, $BB_1 = 6x$. По условию $(4x + 5x + 6x) \cdot 4 = 120$; $15x \cdot 4 = 120$; $x = 2$. Значит, $AB = 8$ см, $BC = 10$ см, $BB_1 = 12$ см. (*Ответ*: 8 см, 10 см, 12 см.)

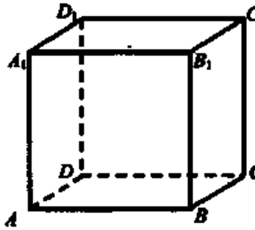


Рис. 11

4) № 112. *Дано*: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед (рис. 12).

Доказать: $AC_1^2 + A_1C^2 + BD_1^2 + B_1D^2 = 4(AB^2 + BB_1^2 + BC^2)$.

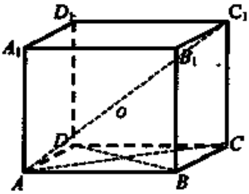


Рис. 12

Решение:

1. Для параллелограмма $ABCD$: $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$.
2. Из параллелограмма AA_1C_1C: $AC_1^2 + A_1C^2 = 2(AA_1^2 + AC^2)$.
3. Из параллелограмма BDD_1B_1: $BD_1^2 + B_1D^2 = 2(BD^2 + BB_1^2)$.
4. $AC_1^2 + A_1C^2 + BD_1^2 + B_1D^2 = 2(AA_1^2 + AC^2 + BB_1^2 + BD^2) = 2(AA_1^2 + 2AB^2 + 2BC^2 + 2AB^2 + 2AD^2 + BB_1^2) = 4(AA_1^2 + AB^2 + BC^2)$.

IV. Подведение итогов

Домашнее задание

П. 13, вопросы 14, 15, № 76, 78.

Дополнительная задача 103

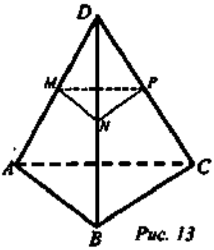


Рис. 13

Дано: $DABC$ тетраэдр, $M \in DA$, $N \in DB$ и $P \in DC$, $\frac{DM}{MA} = \frac{DN}{NB} = \frac{DP}{PC}$, $S_{\Delta ABC} = 10$ см^2, $\frac{DM}{MA} = \frac{2}{1}$ (рис. 13).

Доказать: $(MNP) \parallel (ABC)$.

Найти: $S_{\Delta MNP}$.

Решение:

а) 1. Рассмотрим ΔADB и ΔMDN. $\angle D$ – общий; $AD = AM + MD$, $AM = AD - MD$; $BD = DN + BN$, $BN = BD - DN$; $\frac{DM}{MA} = \frac{DM}{NB}$ (по условию), $\frac{DM}{AD - MD} = \frac{DN}{BD - DN}$ или $\frac{AD - MD}{DM} = \frac{BD - DN}{DN} \Rightarrow \frac{AD}{DM} = \frac{BD}{DN}$; $\Delta ADB \sim \Delta MDN$ (по углу и пропорциональным сторонам).

2. Из подобия Δ следует: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. $\Rightarrow MN \parallel AB$.

3. $\Delta BDC \sim \Delta NDP$ – аналогично, используя $\frac{DN}{NB} = \frac{DP}{PC}$, $NP \parallel BC$.

4. $MN \parallel AB$ и $NP \parallel BC \Rightarrow (MNP) \parallel (ABC)$ (по признаку параллельности двух плоскостей).

б) 1. $\Delta ABC \sim \Delta MNP$ (по двум углам); $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MNP}} = k^2$;

2. $\frac{DM}{MA} = \frac{2}{1}$ и $\frac{DM}{MA} = \frac{DM}{AD - MD} = \frac{2}{1}$ или $\frac{AD - MD}{DM} = \frac{1}{2}$; $\frac{AD}{DM} - 1 = \frac{1}{2}$; $\frac{AD}{DM} = \frac{3}{2}$.

3. Из $\Delta ADD \sim MDN \Rightarrow \frac{AD}{DM} = \frac{AB}{MN} = k = \frac{3}{2}$.

4. $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MNP}} = \frac{10}{S_{\Delta MNP}}$, $= \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$. $S_{\Delta MNP} = 4\frac{4}{9}$ (см²).

(*Ответ*: $S_{\Delta MNP} = 4\frac{4}{9}$ см².)

Урок 20. Задачи на построение сечений

Цель урока:

– выработать навыки решения задач на построение сечений тетраэдра и параллелепипеда.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Проверка домашнего задания

Ответы на вопросы 14, 15.

14. Существует ли тетраэдр, у которого пять углов граней прямые? (*Ответ*: Нет, так как граней всего 4, они являются треугольниками, а треугольника с двумя прямыми углами не существует.)

15. Существует ли параллелепипед, у которого: а) только одна грань – прямоугольник; б) только две смежные грани – ромбы; в) все углы граней острые; г) все углы граней прямые; д) число всех острых граней не равно числу всех тупых углов граней?

(*Ответ*: а) нет (противоположные грани равны); б) нет (по той же причине); в) нет (таких параллелограммов не существует); г) да (прямоугольный параллелепипед); д) нет (в каждой грани два острых и два тупых угла, либо все прямые.)

III. Изучение нового материала

План:

1. Теоретическая часть.

2. Практическая часть (решение задачи № 1).

Учитель: 1) для решения многих геометрических задач, связанных с тетраэдром и параллелепипедом, полезно уметь строить на рисунке их сечения различными плоскостями. Под сечением будем понимать любую плоскость (назовем ее секущей плоскостью), по обе стороны от которой имеются точки данной фигуры (то есть тетраэдра или параллелепипеда). Секущая плоскость пересекает тетраэдр (параллелепипед) по отрезкам. Многоугольник, который будет образован этими отрезками, и является сечением фигуры. Так как тетра-

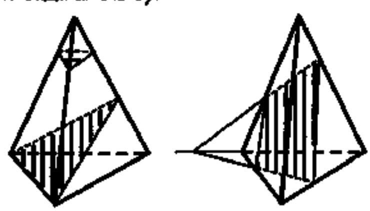


Рис. 1

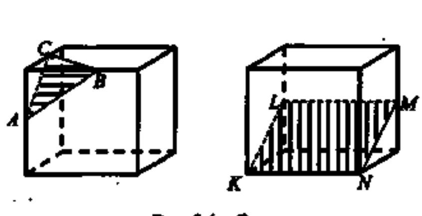


Рис. 2 (*а*, *б*)

эдр имеет четыре грани, то его сечением могут быть треугольники и четырехугольники (рис. 1). Параллелепипед имеет шесть граней. Его сечением могут быть треугольники (рис. 2*а*), четырехугольники (рис. 2*б*), пятиугольники (рис. 2*в*) и шестиугольники (рис. 2*г*).

При построении сечения параллелепипеда учитываем тот факт, что если секущая плоскость пересекает две противоположные грани по каким-то отрезкам, то эти отрезки параллельны (свойство 1, п. 11: Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны). Более подробно с построением сечения параллелепипеда мы познакомимся на следующем уроке.

Для построения сечения достаточно построить точки пересечения секущей плоскости с ребрами тетраэдра (параллелепипеда), после чего остается провести отрезки, соединяющие каждые две построенные точки, лежащие в одной и той же грани.

2) Рассмотрим примеры построения различных сечений тетраэдра, для этого решим задачу: На ребрах AB, BD и CD тетраэдра $ABCD$ отмечены точки M, N, P (рис. 3 *а*). Построить сечение тетраэдра плоскостью MNP.

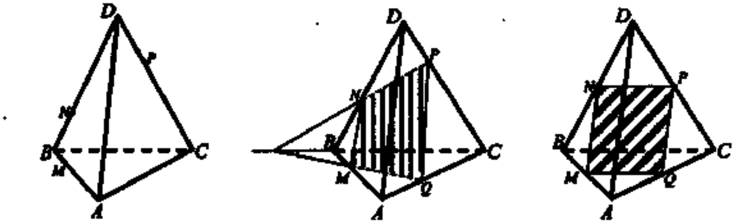
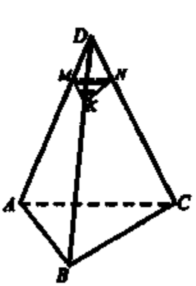
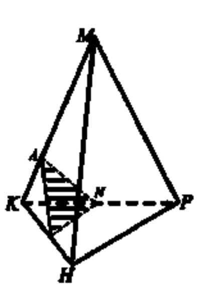


Рис. 3 (а, б, в)





Решение: Построим сначала прямую, по которой плоскость MNP пересекается с плоскостью грани ABC. Точка M является общей точкой этих плоскостей. Для построения еще одной общей точки продолжим отрезки NP и BC до их пересечения в точке E (рис. 3 *б*), которая и будет второй общей точкой плоскостей MNP и ABC. Следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой ME. Прямая ME пересекает ребро AC в некоторой точке A. Четырехугольник $MNPQ$ – искомое сечение.

Если прямые NP и BC параллельны (рис. 3*в*), то прямая NP параллельна грани ABC, поэтому плоскость MNP пересекает эту грань по прямой ME, параллельной прямой NP. Точка Q, как и в предыдущем случае, есть точка пересечения ребра AC с прямой ME.

3) Работа у доски:

– *Первый ученик*: построить сечение тетраэдра $DABC$ плоскостью, проходящей через данные точки MNK.

– *Второй ученик*: построить сечение тетраэдра *MKPH* плоскостью, проходящей через точки *ABC*. Найти периметр сечения. Ребро тетраэдра равно *a*.
– *Третий ученик* (№ 105): Изобразите тетраэдр *DABC* и отметьте точки *M* и *N* на ребрах *BD* и *CD* и внутреннюю точку *K* грани *ABC*. Постройте сечение тетраэдра плоскостью *MNK*.

Решение: Обозначим секущую плоскость буквой α. Тогда $M \in \alpha$, $N \in \alpha$, $M \in CDB$, $N \in CDB$, $\alpha \cap CDB = MN$.

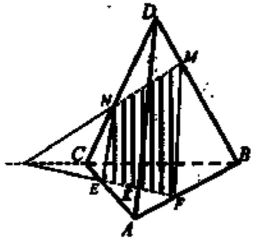


Рис. 4

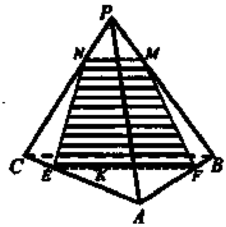


Рис. 5

Возможны два случая:

1°) $MN \cap BC = P$; 2°) $MN \parallel BC$. Рассмотрим их отдельно. 1°) Проводим прямую *MN*. $P \in \alpha$, $K \in \alpha$, $P \in ABC$, $K \in ABC$, $\alpha \cap ABC = PK$. Проводим прямую *PK*. Пусть она пересекает стороны *AC* и *AB* в точках *E* и *F*. Проводим отрезки *NE* и *MF*. Искомое сечение – четырехугольник *MNEF* (рис. 4).

2) Через точку *K* проводим $EF \parallel BC$. Проводим отрезки *NE* и *MF*. Искомое сечение – четырехугольник *MNEF* (рис. 5).

4) Работа по карточкам: (пока третий ученик работает у доски, 4 ученика работают по карточкам).

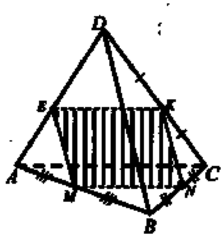


Рис. 6

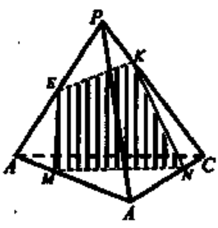


Рис. 7

– построить сечение тетраэдра *DABC* плоскостью, проходящей через данные точки *M*, *N*, *K*. Найти периметр сечения. Ребро тетраэдра равно *a* (рис. 6).
– построить сечение тетраэдра *DABC* плоскостью, проходящей через данные точки *M*, *N*, *K*; $NM \parallel AC$ (рис. 7).
– построить сечение тетраэдра *DABC* плоскостью, проходящей через данные точки *M*, *N*, *K*. *EKNM* – искомое сечение (рис. 8).

– построить сечение тетраэдра $DABC$ плоскостью, проходящей через данные точки M, N, K (рис. 9).

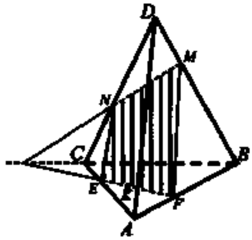


Рис. 4

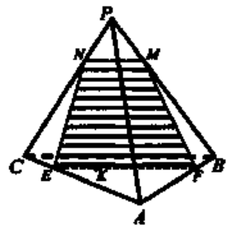


Рис. 5

Возможны два случая:

1°) $MN \cap BC = P$; 2°) $MN \parallel BC$. Рассмотрим их отдельно. 1°) Проводим прямую MN. $P \in \alpha$, $K \in \alpha$, $P \in ABC$, $K \in ABC$, $\alpha \cap ABC = PK$. Проводим прямую PK. Пусть она пересекает стороны AC и AB в точках E и F. Проводим отрезки NE и MF. Искомое сечение – четырехугольник $MNEF$ (рис. 4).

2) Через точку K проводим $EF \parallel BC$. Проводим отрезки NE и MF. Искомое сечение – четырехугольник $MNEF$ (рис. 5).

4) Работа по карточкам: (пока третий ученик работает у доски, 4 ученика работают по карточкам).

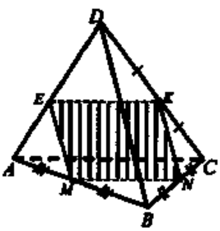


Рис. 6

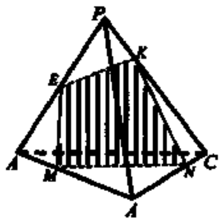


Рис. 7

– построить сечение тетраэдра $DABC$ плоскостью, проходящей через данные точки M, N, K. Найти периметр сечения. Ребро тетраэдра равно a (рис. 6).
– построить сечение тетраэдра $DABC$ плоскостью, проходящей через данные точки M, N, K; $NM \parallel AC$ (рис. 7).
– построить сечение тетраэдра $DABC$ плоскостью, проходящей через данные точки M, N, K. $EKNM$ – искомое сечение (рис. 8).
– построить сечение тетраэдра $DABC$ плоскостью, проходящей через данные точки M, N, K (рис. 9).

$KNME$ – искомое сечение.

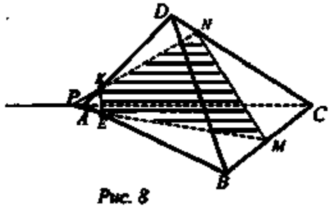


Рис. 8

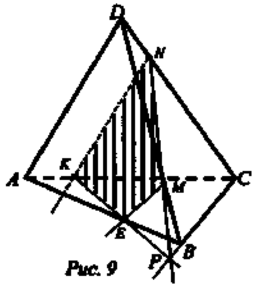


Рис. 9

Домашнее задание

П. 14, стр. 27 № 104 – Вариант I, № 106 – Вариант II.

Задача 104

Решение: Проведем $ME \parallel AC$ и $MF \parallel BD$. По теореме 2. (Через две пересекающие прямые проходит плоскость, и притом только одна) плоскость сечения пересечет плоскость BCD по прямой, параллельной MF ($MF \parallel$ плоскости BCD по построению), значит, проводим $EK \parallel BD$. Соединим точки K и F. Четырехугольник $MEKF$ – искомое сечение. Докажем это. $AC \parallel$ плоскости MEF (так как $AC \parallel ME$; $ME \subset MEF$). $BD \parallel$ плоскости MEF (то есть $BD \parallel MF$; $MF \subset MEF$). Итак, плоскость $MEKF \parallel AC$ и плоскость $MEKF \parallel BD$. Так как через точку M можно провести лишь одну прямую $ME \parallel AC$ в плоскости грани ABC и одну прямую $MF \parallel BD$ в плоскости грани BAD, то плоскость $MEKF$ – единственная, удовлетворяющая условию задачи (рис. 10).

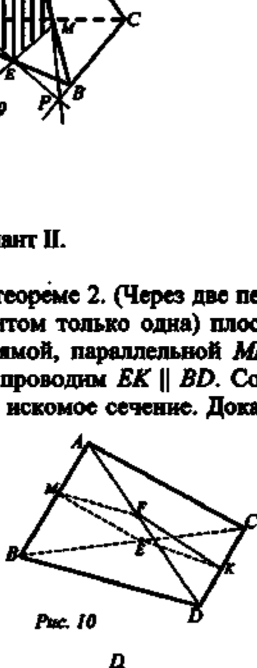


Рис. 10

Задача 106

Решение: Пусть точки расположены так, как показано на рисунке 11. 1. Проводим KN до пересечения с продолжением ребра CA. Пусть KN пересечет CA в точке O. 2. Проводим луч OM; он пересечет ребро AB в точке E, а ребро BC – в точке L. Соединим K и L, F и E (точка F – точка пересечения KN с ребром DA). Сечение $KFEL$ – искомое.

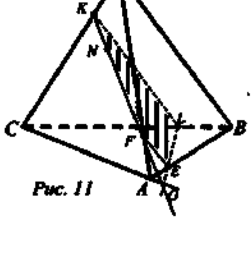


Рис. 11

Построим:

1) KN до пересечения в точке F с ребром AC.
2) FM до пересечения с ребром AB в точке E и ребром BC (его продолжением) в точке O.
3) OK, он пересечет DB в точке L; 4) отрезок EL. 5) $KFEL$ – искомое сечение (рис. 12).

Проводим KN до пересечения с AC в точке F; продолжаем KN за точкой F до пересечения с продолжением DA в точке O; FM до пересечения с AB в точке E; OE до пересечения с DB в точке L; отрезок KL. $KFEL$ – искомое сечение (рис. 13).

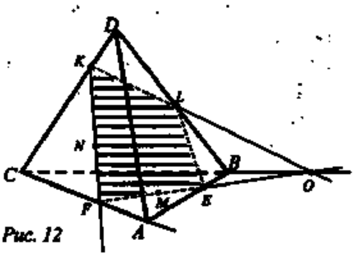


Рис. 12

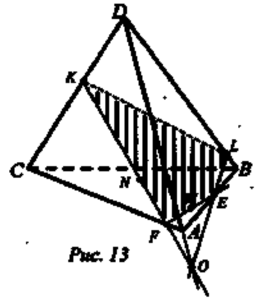


Рис. 13

VII. Подведение итогов

Оценки.

Урок 21. Задачи на построение сечений

Цель урока:

– выработать навыки решения задач на построение сечений параллелепипеда.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Проверка домашнего задания

Вопрос: Какие многоугольники могут получиться в сечении а) тетраэдра; б) параллелепипеда? *Ответ:* а) треугольники и четырехугольники; б) треугольники, четырехугольники, пятиугольники, шестиугольники. № 104, 106 (решение см. в плане урока № 20).

III. Изучение нового материала

Задача № 3

На ребрах параллелепипеда даны три точки A, B, C. Построить сечение параллелепипеда плоскостью ABC.

Решение:

Построение искомого сечения зависит от того, на каких ребрах параллелепипеда лежат точки *A*, *B*, *C*. В самом простом случае, когда эти точки лежат на ребрах, выходящих из одной вершины (рис. 1 *а*), нужно провести отрезки *AB*, *BC*, *CA*, и получится искомое сечение – треугольник *ABC*. Если три точки *A*, *B*, *C* расположены так, как показано на рис. 1 *б*, то сначала нужно провести отрезки *AB* и *BC*, а затем через точку *A* провести прямую, параллельную *BC*, а через точку *C* – прямую, параллельную *AB*. Пересечения этих прямых с ребрами нижней грани дают точки *E* и *D*. Остается провести отрезок *ED*, и искомое сечение – пятиугольник *ABCDE*.

Более трудный случай, когда данные точки *A*, *B*, *C* расположены так, как показано на рис. 1*в*. В этом случае поступим так. Сначала построим прямую, по которой секущая плоскость пересекается с плоскостью нижнего основания. Для этого проведем прямую *AB* и продолжим нижнее ребро, лежащее в той же грани, что и прямая *AB*, до пересечения с этой прямой в точке *M*. Далее через точку *M* проведем прямую, параллельную прямой

BC. Это и есть прямая, по которой секущая плоскость пересекается с плоскостью нижнего основания. Эта прямая пересекается с ребрами нижнего основания в точках E и F. Затем через точку E проведем прямую, параллельную прямой AB, и получим точку D. Наконец, проводим отрезки AF и CD, и искомое сечение – шестиугольник $ABCDEF$ – построено.

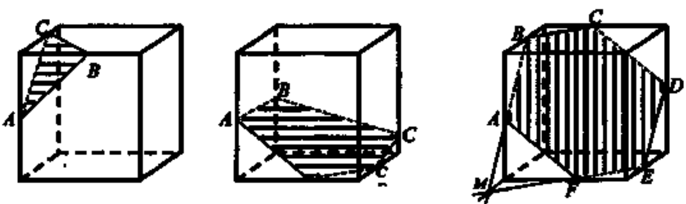
IV. Работа у доски

– первый ученик:

Задача 79

а) *Решение:* плоскость $BB_1C_1C \parallel AA_1D_1$ по свойству параллелепипеда, отсюда $BC_1 \parallel AA_1D_1$. Точка A общая для плоскостей ABC_1 и AA_1D_1 – плоскости пересекаются по прямой, проходящей через точку A и параллельной BC_1. (Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны), очевидно, это AD_1. Искомое сечение – четырехугольник ABC_1D_1.

Доказательство: $AB \parallel CD$ (так как $ABCD$ – параллелограмм). $AB = CD$ (так как $ABCD$ – параллелограмм). $CD \parallel C_1D_1$ (так как CDD_1C_1 – параллелограмм). $CD = C_1D_1$ (так как CDD_1C_1 – параллелограмм).



а) *б)* *в)*

Рис. 1

Отсюда следует, что $AB \parallel C_1D_1$. Значит, ABC_1D_1 – параллелограмм, так как его противоположные стороны параллельны и равны.

– второй ученик:

Задача 80

Решение:

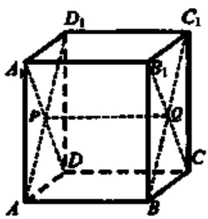


Рис. 2

а) Сечение плоскостью ABC_1. Плоскость $BB_1C_1 \parallel AA_1D_1$ по свойству параллелепипеда, отсюда $BC_1 \parallel AA_1D_1D$. Тогда A – общая точка для плоскостей ABC_1 и AA_1D_1 – плоскости пересекаются по прямой, проходящей через точку A и параллельной BC_1. (Свойство см. в предыдущей задаче). Плоскости граней AA_1B_1B и DD_1C_1C пересечены плоскостью ABC_1, значит, их линии пересечения параллельны, $AB \parallel C_1D_1$.

Вывод: плоскость пересекает грань AA_1D_1D по прямой AD_1 $AD_1 \parallel BC_1$. Искомое сечение ABC_1D_1 параллелограмм по определению.

б) Сечение плоскостью DCB_1. Точка D – общая для плоскостей DCB_1 и AA_1D – плоскости пересекаются по прямой DA_1, (свойство 1 из п. 11). В плоскости грани AA_1D_1D проводим такую прямую. Это будет DA_1 (четырехугольник DCB_1A_1 – параллелограмм, поэтому $DA_1 \parallel CB_1$), искомое сечение DCB_1A_1.

в) PQ – отрезок, по которому пересекаются построенные сечения (P принадлежит плоскости сечений и Q принадлежит плоскостям сечений, PQ – линия пересечения плоскостей), где P и Q – центры граней AA_1D_1D и BB_1C_1C.

V. Работа по карточкам (5 учащихся работают по карточкам самостоятельно, один у доски).

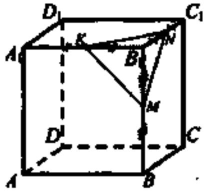


Рис. 3

Карточка № 1

Построить сечение куба плоскостью, проходящей через три данные точки, являющиеся серединами его ребер (три данные точки на рисунке выделены). Найти периметр сечения, если ребро куба равно a (рис. 3).

Карточка № 2

Построить сечение куба плоскостью, проходящей через три данные точки, являющиеся вершинами куба (три данные точки на рисунке выделены). Найти периметр сечения, если ребро куба равно a (рис. 4).

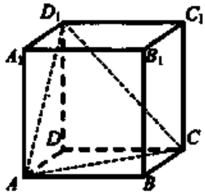


Рис. 4

Карточка № 3

Построить сечение куба плоскостью, проходящей через три данные точки, являющиеся либо вершинами куба, либо серединами его ребер (три данные точки на рисунке выделены). Найти периметр сечения, если ребро куба равно a (рис. 5).

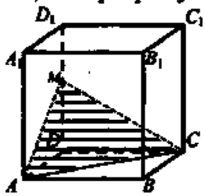


Рис. 5

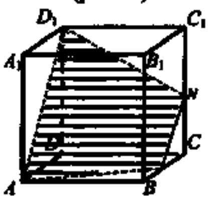


Рис. 6

Карточка № 4

Построить сечение куба плоскостью, проходящей через три данные точки, являющиеся либо вершинами куба, либо серединами его ребер (три данные точки на рисунке выделены). Найти периметр сечения, если ребро куба равно a (рис. 6).

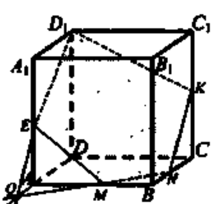


Рис. 7

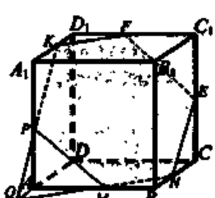


Рис. 8

Карточка № 5

Построить сечение куба плоскостью, проходящей через три данные точки, являющиеся либо вершинами куба, либо серединами его ребер (три данные точки на рисунке выделены). Доказать, что $AE = \frac{1}{3}a$ (ребро куба равно a) (рис. 7).

Карточка № 6

Построить сечение куба плоскостью, проходящей через три данные точки, являющиеся серединами его ребер (три данные точки на рисунке выделены) (рис. 8).

Карточка № 7

Все грани параллелепипеда – равные ромбы со стороной a и острым углом 60°. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки B, D, M, если M – середина ребра BC. Доказать, что построенное сечение есть равнобедренная трапеция. Найти стороны трапеции.

Решение:

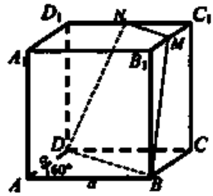


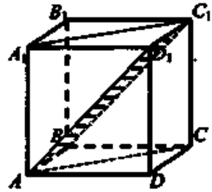
Рис. 9

1) Пусть α – секущая плоскость, $\alpha \cap ABC = BD$, $\alpha \cap BCC_1B_1 = BM$, $MN \parallel BD$, сечение – трапеция $BDNM$.
2) $\Delta BB_1M = \Delta DD_1N$, $BM = DN$, трапеция $BDNM$ равнобедренная.
3) $BD = a$, $MN = \dfrac{a}{2}$, $BM = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$ (домашнее задание для более сильных учащиеся) (рис. 9).

Домашнее задание

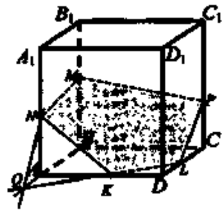
П. 14, № 79б – первый вариант, № 81 – второй вариант, № 87 – третий вариант.

Задача 79 б)



Решение: Сечение плоскостью ACC_1. Плоскости граней B_1C_1CB и A_1D_1DA пересечены плоскостью A_1C_1CA, линии пересечения параллельны, $AA_1 \parallel CC_1$. $AA_1 = CC_1$ (по свойству: отрезки параллельных прямых, заключенных между параллельными плоскостями, равны). $AA_1 \parallel CC_1$ и $AA_1 = CC_1$ (по признаку параллелограмма), AA_1C_1C – параллелограмм.

Задача 81



а) Пусть MN не параллельна BC, тогда MN пересечет плоскость ABC.

Построение: продолжим отрезки BC и MN до пересечения в точке x. Тогда точка x искомая;

б) AM не параллельна A_1B_1, AM пересечет A_1B_1, A_1B_1C плоскости $A_1B_1C_1$.

Построение: Продолжим отрезки A_1B_1 и AM до пересечения в точке $У$. Точка $У$ – искомая (рис. 10).

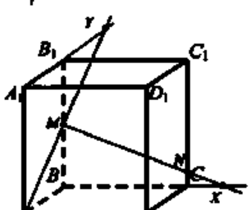


Рис. 10

Задача 87 а)

Построение:

1. Допустим, что MN не параллельна AB.
2. Продолжим MN и AB до пересечения их в точке O.
3. $OK \subset ABC$ (так как O принадлежит плоскости ABC и K принадлежит плоскости ABC).
4. Соединим точки K и N.
5. Плоскости ONK и OAK (то есть плоскость ABC) пересекаются по прямой OK.
6. Поэтому продолжим OK до пересечения с DC в точке L. Соединим точки K и L, ведь они лежат в одной плоскости.

7. Противоположные грани AA_1B_1B и DD_1C_1C секущая плоскость пересечет по параллельным прямым (по теореме: через две пересекающие прямые проходит плоскость, и притом только одна), поэтому в плоскости DD_1C_1C проведем $LP \parallel NM$.
8. Соединим точки P и M.
9. $MNKLP$ – искомое сечение.

Задача 87 б)

Построение:

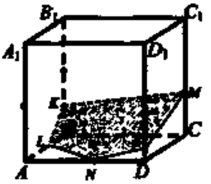


Рис. 11

1. Соединим точки K и M.
2. Точка N принадлежит грани AA_1D_1D и секущей плоскости.
3. Секущая плоскость, проходящая через точку N, пересечет параллельные грани AA_1D_1D и BB_1C_1C по параллельным прямым; поэтому в плоскости AA_1D_1D проводим $NP \parallel KM$.
4. Проводим PM.
5. Секущая плоскость проходит через точку K и пересекает противоположные грани AA_1B_1B и DD_1C_1C по параллельным прямым; поэтому в плоскости грани AA_1B_1B проводим $KL \parallel MP$.
6. Соединим L и M.
7. $KLNPM$ – искомое сечение (рис. 11).

VI. Подведение итогов

Оценки.

Урок 22. Закрепление свойств параллелепипеда

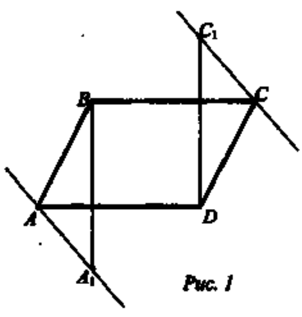


Рис. 1

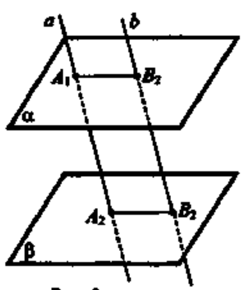


Рис. 2

Цель урока:

– подготовка к контрольной работе.

I уровень

Задача 1

Дано: $ABCD$ – параллелограмм, AA_1 и CC_1. Прямые AA_1 и CC_1 не лежат в одной плоскости параллелограмма (рис. 1).

Доказать: $(A_1AB) \parallel (C_1CD)$.

Решение: $AB \parallel CD$ – противоположные стороны параллелограмма, $AA_1 \parallel CC_1$ по условию. $BA \cap AA_1 = A$, $DC \cap CC_1 = C$. По признаку параллельности плоскостей $(A_1AB) \parallel (C_1CD)$. Что и требовалось доказать.

Задача 2

Дано: $\alpha \parallel \beta$, $a \parallel b$; $a \cap \alpha = A_1$; $a \cap \beta = A_2$; $b \cap \alpha = B_1$; $b \cap \beta = B_2$; $\angle A_1A_2B_2 = 140°$ (рис. 2).

а) *Доказать:* $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

б) *Найти:* $\angle A_2A_1B_1$.

Решение:

а) Из определения параллельных прямых в пространстве следует, что прямые a и b лежат в одной плоскости, которая пересекает параллельные плоскости α и β по прямым A_1B_1 и A_2B_2. По 1° свойству параллельных плоскостей $A_1B_1 \parallel A_2B_2$. Что и требовалось доказать.

б) Отрезки $A_1A_2 \parallel B_1B_2$, так как а ∥ в по условию. $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ по выше доказанному. Значит, $A_2B_2B_1A_1$ – параллелограмм по определению. По свойству параллелограмма (сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180°) $\angle A_1A_2B_2 + \angle A_2A_1B_1 = 180°$. Так как по условию $\angle A_1A_2B_2 = 140°$, то $\angle A_2A_1B_1 = 180° - \angle A_1A_2B_2 = 180° - 140° = 40°$. (*Ответ*: $\angle A_2A_1B_1 = 40°$.)

Задача 3

Дано: $ABCD$ – параллелограмм. Прямые AA_1 и CC_1 не лежат в плоскости параллелограмма $AA_1 \parallel CC_1$ (рис. 3).

Доказать: $(A_1AD) \parallel (C_1CB)$.

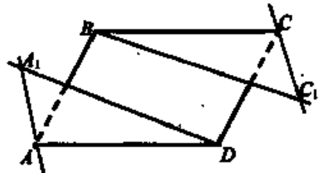


Рис. 3

Решение: $BC \parallel AD$ – противоположные стороны параллелограмма. $CC_1 \parallel AA_1$ по условию; $AA_1 \cap AD = A$; $BC \cap CC_1 = C$. По признаку параллельности двух плоскостей $(A_1AD) \parallel (C_1CB)$. Что и требовалось доказать.

Задача 4

Дано: $\alpha \parallel \beta$; $a \parallel b$; $a \cap \alpha = A_1$; $b \cap \alpha = B_1$, $a \cap \beta = A_2$ $b \cap \beta = B_2$. $\angle B_1A_1A_2 = 50°$ (рис. 4).

а) *Доказать:* $A_1B_1 = A_2B_2$.

б) *Найти:* $\angle B_1B_2A_2$.

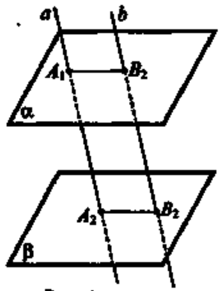


Рис. 4

Решение:

а) Отрезки A_1A_2 и $B_1\,B_2$ параллельных прямых a и b параллельны, то есть $A_1A_2 \parallel B_1B_2$. $\alpha \parallel \beta$, $a \parallel b$ по условию. Следовательно, по свойству 2° параллельных плоскостей $A_1A_2 = B_1B_2$. Значит, противоположные стороны A_1A_2 и B_1B_2 четырехугольника $A_2B_2B_1A_1$ равны и параллельны и $A_2B_2B_1A_1$ – параллелограмм. В параллелограмме противолежащие стороны равны, поэтому $A_1B_1 = A_2B_2$, что и требовалось доказать.

б) В параллелограмме противоположные углы равны, $\angle B_1A_1A_2 = \angle B_1B_2A_2$, так как $\angle B_1A_1A_2 = 50°$, то $\angle B_1B_2A_2 = 50°$.

(*Ответ*: $\angle B_1B_2A_2 = 50°$.)

II уровень

Задача 5

Дано: $ABCD$ и A_1B_1CD параллелограммы не лежат в одной плоскости (рис. 5).

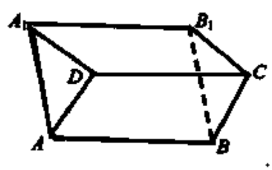


Рис. 5

Доказать: $(ADA_1) \parallel (BCB_1)$.

Решение:

$$\left.\begin{matrix} A_1D \parallel B_1C \\ AD \parallel BC \end{matrix}\right\}$$ противоположные стороны параллелограммов $AD \cap DA = D$; $B_1C \cap CB = C$. По признаку параллельности двух плоскостей $(ADA_1) \parallel (BCB_1)$.

Задача 6

Дано: $\alpha \parallel \beta$; $AC \cap BD = O$; $AB = DC$ (рис. 6).

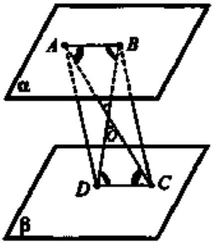


Рис. 6

Доказать: а) $AB \parallel CD$; б) $\angle ADC$ четырехугольника $ABCD$ равен 65°.

Найти остальные углы.

Решение: Прямые AC и BD пересекаются и задают плоскость $ABCD$. По свойству параллельных плоскостей (п. 11, 1°) $AB \parallel CD$, $\Delta AOB = \Delta DOC$ по второму признаку $\left.\begin{cases}\angle OBA = \angle ODC\\ \angle OAB = \angle OCD\end{cases}\right\}$ как внутренние накрест лежащие при параллельных AB и DC и секущей BD и AC для второй пары. $AB = DC$ по условию.

Из равенства треугольников следует, что $OB = OD$, $AO = CO$; то есть диагонали четырехугольника делятся точкой пересечения пополам. Значит, $ABCD$ – параллелограмм. У параллелограмма противоположные углы равны. Если $\angle ADC = 65$ °, то $\angle ABC = 65$ °, $\angle DAB = 180° - \angle ADC = 180° - 65° = 115°$. $\angle BCD = \angle DAB = 115°$. (*Ответ*: 65°, 115°, 115°.)

Задача 7

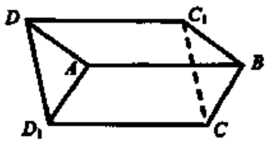


Рис. 7

Дано: $ABCD$ и ABC_1D_1 – параллелограммы не лежат в одной плоскости (рис. 7).

Доказать: $(CBC_1) \parallel (DAD_1)$.

Решение: $\left.\begin{matrix}C_1B \parallel D_1A\\ BC \parallel AD\end{matrix}\right|$ по определению параллелограмма $C_1B \cap BC = B$; $D_1A \cap AD = A$; $C_1B \subset (CBC_1)$, $BC \subset (CBC_1)$; $D_1A \subset (DAD_1)$, $DA \subset (DAD_1)$. Имеем две пересекающиеся прямые одной плоскости, соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости. Следовательно, по признаку параллельности двух плоскостей $(CB_1C) \parallel (DAD_1)$. Что и требовалось доказать.

Задача 8

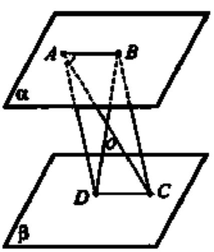


Рис. 8

Дано: $\alpha \parallel \beta$, $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \beta$, $D \in \beta$. $AC \cap BD = = O$, $AB = CD$, $\angle BAD = 130°$ (рис. 8).

а) *Доказать:* $AD \parallel BC$.

б) *Найти:* $\angle ABC$, $\angle ADC$, $\angle BCD$.

Решение:

а) Две пересекающиеся прямые единственным образом задают плоскость. Отрезки AC и BD пересекаются и задают плоскость $ABCD$, которая пересекает параллельные плоскости α и β по прямым AB и DC. По свойству 1° параллельных плоскостей $AB \parallel DC$. $AB = DC$ по условию.

Поэтому четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм. Значит, $AD \parallel BC$. Что и требовалось доказать.

б) В параллелограмме сумма углов, прилежащих к одной стороне равна 180°. $\angle BAD + \angle ADC = 180°$. $\angle ADC = 180° - \angle BAD = 180° - 130° = 50°$. В параллелограмме противоположные углы равны. $\angle BAD = \angle BCD$, $\angle ABC = \angle ADC$. Так как $\angle BAD = 130°$, то $\angle BCD = 130°$, $\angle ADC = 50°$, то и $\angle ABC = 50°$. (*Ответ*: $\angle BCD = 130°$, $\angle ADC = 50°$, $\angle ABC = 50°$.)

III уровень

Задача 9

Дано: $a \parallel \alpha$, $a \parallel \beta$, $b \parallel \alpha$, $b \parallel \beta$ (рис. 9).

При каком взаимном расположении прямых a и b $\alpha \parallel \beta$?

Рис. 9

Решение: $\alpha \parallel \beta$, если прямые a и b пересекаются. Две пересекающиеся прямые единственным образом задают плоскость. Прямые a и b пересекаются и задают плоскость γ. Пересекающиеся прямые a и b плоскости γ параллельны плоскости α. Значит, $\alpha \parallel \gamma$ (задача 51). Рассуждая аналогично, имеем $\beta \parallel \gamma$, $\alpha \parallel \gamma$, $\beta \parallel \gamma$. Следовательно, $\alpha \parallel \beta$ (задача 60).

Задача 10

Дано: $\alpha \parallel \beta$. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O, $AC = BD$, $A \in \beta$, $B \in \beta$, $D \in \alpha$, $C \in \alpha$ (рис. 10).

а) При каком дополнительном условии пересечения отрезков $ABCD$ – прямоугольник?

б) Доказать: $ABCD$ – равнобокая трапеция.

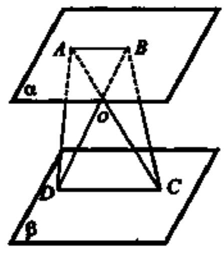


Рис. 10

а) Две пересекающиеся прямые единственным образом задают плоскость.

Отрезки AC и BD пересекаются и задают плоскость $ABCD$. По 1° свойству параллельных плоскостей $AB \parallel CD$. По условию $AC = BD$. При дополнительном условии, что пересекающиеся отрезки делятся точкой пересечения пополам, $ABCD$ будет являться прямоугольником.

б) Из выше доказанного $AB \parallel CD$. Значит, $ABCD$ – трапеция по определению. $AC \parallel BD$ – ее диагонали. Если диагонали трапеции равны, то она равнобедренная. $AC = BD$ по условию. Значит, $ABCD$ – равнобокая трапеция.

Задача 11

Дано: $a \subset \alpha$, $a \subset \beta$, $b \parallel \alpha$, $b \parallel \beta$ (рис. 11).

При каком взаимном расположении прямых a и b $\alpha \parallel \beta$?

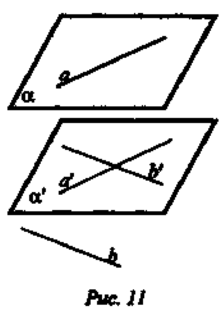


Рис. 11

Решение: $a \parallel \beta \Rightarrow a' \subset \beta$ и $a' \parallel a$; $b \parallel \beta \Rightarrow b' \subset \beta$ и $b' \parallel a$; $a' \cap b' \Rightarrow a$ и b скрещивающиеся прямые; $a' \parallel b' \Rightarrow a \parallel b$; $\alpha \parallel \beta$, если прямые a и b скрещивающиеся или параллельные.

Задача 12

Дано: $\alpha \parallel \beta$; $AC \perp BD$, $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $D \in \beta$, $C \in \beta$ (рис. 12).

а) При каком дополнительном условии пересечения отрезков $ABCD$ – квадрат?

б) Доказать, что $ABCD$ трапеция, в которой высота равна средней линии.

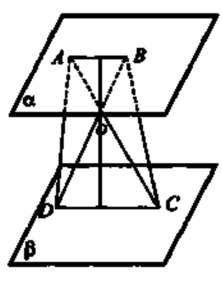


Рис. 12

Решение:

а) По свойству 1° параллельных $AB \parallel DC$. При условии, что отрезки точкой пересечения делятся пополам, $ABCD$ будет являться квадратом.

б) $\Delta BDC = \Delta ADC$ (по двум сторонам и углу между ними. DC – общая, $AD=BC$, $\angle ADC=\angle BCD$ как углы при основании равнобедренной трапеции).

Из равенства треугольников следует, что $\angle BDC = \angle ACD$. Тогда $DO = OC$. ΔDOC – прямоугольный и равнобедренный. OM – высота, биссектриса, медиана. ΔOMC – прямоугольный равнобедренный. $OM = MC$ или $OM = \frac{1}{2}DC$.

Аналогично $AO = OB$, $ON = \frac{1}{2}BA$; $MN = OM + ON = \frac{1}{2}DC + \frac{1}{2}BA =$ $= \frac{1}{2}(DC + BA)$, где MN – высота, $\frac{1}{2}(DC + BA)$ – средняя линия трапеции.

Примечание: Задачи решаются учащимися самостоятельно. Уровень выбирают ученики. Анализ решений делает учитель.

Урок 23. Контрольная работа № 1 (см. приложение)

Цели урока:

1) проверка знаний, умений и навыков при решении задач;
2) умение объяснять смысл решения задач.

Ответы:

I уровень

Вариант I

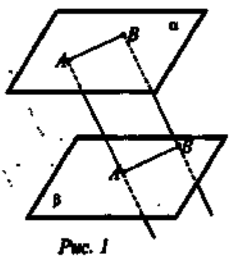


Рис. 1

1. *Дано:* $\alpha \parallel \beta$, $AB = 5$ см. $A_1 \in \beta$, $B_1 \in \beta$. $A \in \alpha$, $B \in \alpha$ (рис. 1).

Найти: A_1B_1.

Решение: $\alpha \parallel \beta$; $AA_1 \parallel BB_1$ по свойству отрезков $\Rightarrow AA_1 = BB_1 \Rightarrow ABB_1A_1$ – параллелограмм $\Rightarrow AB = A_1B_1 = 5$ см. (*Ответ:* $A_1B_1 = 5$ см.)

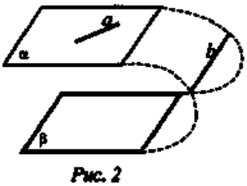


Рис. 2

2. *Дано:* $a \subset \alpha$; $a \parallel \beta$ (рис. 2).

Верно ли: $\alpha \parallel \beta$?

Решение:

Пусть $\alpha \nparallel \beta$, тогда $\alpha \cap \beta = b$. $a \parallel \beta \Rightarrow a \not\times b \Rightarrow a \parallel b$ (возможно) $\Rightarrow \alpha \cap \beta$ по прямой $b \Rightarrow \alpha \parallel \beta$. (*Ответ:* не верно.)

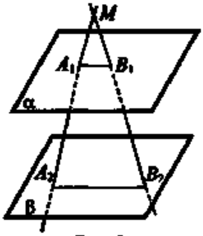


Рис. 3

3. *Дано:* $\alpha \parallel \beta$, $M \notin \alpha$, $M \notin \beta$, $a \cap \alpha = A_1$, $a \cap \beta = A_2$, $b \cap \alpha = B_1$, $b \cap \beta = B_2$, $MA_1 = 4$ см, $B_1B_2 = 9$ см, $A_1A_2 = MB_1$ (рис. 3).

Найти: MA_2, MB_2.

Решение:

1) $\alpha \parallel \beta$; $(MA_2B_2) \cap \beta = A_2B_2$; $(MA_2B_2) \cap \alpha = A_1B_1 \Rightarrow$ по свойству параллельных плоскостей $A_1B_1 \parallel A_2B_2$;

2) $\Delta A_2MB_2 \sim \Delta A_1MB_1$; $\frac{MA_2}{MA_1} = \frac{MB_2}{MB_1}$. Пусть A_1A_2

$= x$; $\frac{x+4}{4} = \frac{x+9}{x}$; $x^2 + 4x = 4x + 36$; $x^2 = 36$; $x = 6$; $MA_2 = 6 + 4 = 10$ см, $MB_2 = 6 + 9 = 15$ см.

(*Ответ*: $MA_2 = 10$ см, $MB_2 = 15$ см.)

Вариант II

1. *Дано:* $\alpha \parallel \beta$; $AB \parallel CD$; $CD = 3$ см (рис. 4).

Найти: AB.

Решение: $\alpha \parallel \beta$; $AB \parallel CD \Rightarrow$ по свойству параллельных плоскостей $AB = CD$. $AB = 3$ см. (*Ответ*: $AB = 3$ см.)

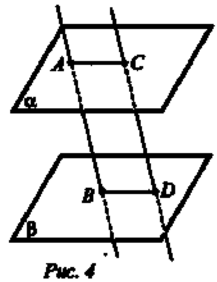


Рис. 4

2. *Дано:* α, β; $a, b \in \alpha$; $a_1, b_1 \in \beta$; $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$ (рис. 5).

Верно ли: $\alpha \parallel \beta$?

Решение: Пусть $\alpha \nparallel \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = c$. 1) $a \parallel a_1 \Rightarrow \Rightarrow a \parallel \beta \Rightarrow a \parallel c$; $b \parallel b_1 \Rightarrow b \parallel \beta \Rightarrow b \parallel c \Rightarrow a \parallel b$ (может) $\Rightarrow$ по признаку параллельности прямой и плоскости $\Rightarrow \alpha \parallel \beta$ (не верно). (*Ответ*: не верно.)

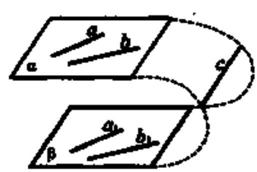


Рис. 5

3. *Дано:* $\alpha \parallel \beta$; $O \notin \alpha$, $O \notin \beta$; $OH \cap \alpha = A$; $OH \cap \beta = A_1$; $OH_1 \cap \alpha = B$; $OH_1 \cap \beta = B_1$; $OH_2 \cap \alpha = C$; $OH_2 \cap \beta = C$; $OA < OA_1$; $OA = m$, $AA_1 = n$; $AB = b$, $BC = a$ (рис. 6).

Найти: $P_{A_1B_1C_1}$.

Решение:

1) $\alpha \parallel \beta$.
2) $(A_1OC_1) \cap \alpha = AC$; $(A_1OC_1) \cap \beta = A_1C_1 \Rightarrow$ по свойству параллельности $AC \parallel A_1C_1$.
3) $\Delta A_1OC_1 \sim \Delta AOC$;

$$\frac{OA_1}{OA} = \frac{A_1C_1}{AC};\ \frac{m+n}{m} = \frac{A_1C_1}{b};\ A_1C_1 = \frac{b(m+n)}{m}.$$

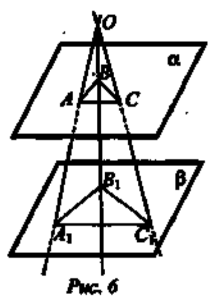


Рис. 6

4) Аналогично: $\Delta A_1OB_1 \sim \Delta AOB$; $\frac{OA_1}{OA} = \frac{A_1B_1}{AB}$;

$$\frac{m+n}{m} = \frac{A_1B_1}{C};\ A_1B_1 = \frac{c \cdot (m+n)}{m}.$$

5) $AC \cap AB = A$; $A_1C_1 \cap A_1B_1 = A_1 \Rightarrow AC \parallel A_1C_1$; $AB \parallel A_1B_1 \Rightarrow \angle A = \angle A_1$,

$$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1.$$

6) По свойству периметров подобных многоугольников: $\frac{P_{\Delta A_1B_1C_1}}{P_{\Delta ABC}} = K$;

$$\frac{P_{\Delta A_1B_1C_1}}{a+b+c} = \frac{m+n}{m};\quad P_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{(a+b+c)(m+n)}{m}.$$

(*Ответ*: $P_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{(a+b+c)(m+n)}{m}$.)

II уровень

Вариант I

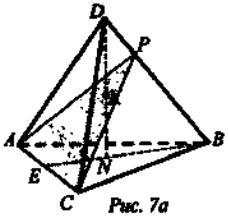


Рис. 7а

1. *Дано:* $DABC$ – треугольная пирамида; $K \subset DN$ (рис. 7*а*).

Построить: сечение.

Построение:

1) EK.
2) $EK \cap DB = P$.
3) PC.
4) PA.
5) APC – искомое сечение.

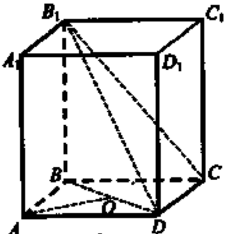


Рис. 9

2. *Дано:* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. $AA_1 = 2$ см (рис. 9).

Найти: AO.

Решение:

1) $B_1D \subset (B_1BD)$; $BA \cap (B_1BD) = B$; $AO \perp (B_1BD)$; AO – расстояние между скрещивающимися прямыми AB и B_1D.

2) $AO = \dfrac{1}{2}AC$. $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$; $AO = \sqrt{2}$.

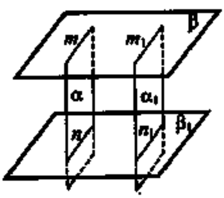


Рис. 10

3. *Дано:* $\alpha \parallel \alpha_1$; $\beta \parallel \beta_1$ (рис. 10).

Доказать: $m \parallel m_1$; $n \parallel n_1$.

Доказательство:

1) $\beta \parallel \beta_1$; $\alpha \cap \beta = m$; $\alpha \cap \beta_1 = n$; по свойству $m \parallel n$;
2) $\beta \parallel \beta_1$; $\alpha_1 \cap \beta = m_1$; $\alpha_1 \cap \beta_1 = n_1$; $m_1 \parallel n_1$;
3) $\alpha \parallel \alpha_1$; $\beta \cap \alpha = m$; $\beta \cap \alpha_1 = m_1$; $m \parallel m_1$.
4) $\alpha \parallel \alpha_1$; $\beta_1 \cap \alpha = n$; $\beta_1 \cap \alpha_1 = n_1$; $n \parallel n_1$ что и требовалось доказать.

Вариант II

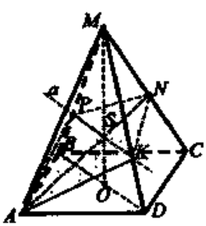


Рис. 8а

1. *Дано:* $MABCD$ – четырехугольная пирамида; $N \in MC$ (рис. 8а).

Построить: сечение.

Построение:

1) AN.
2) $AN \cap MO = S$.
3) $\alpha \parallel BD, S \in \alpha$.
4) $K = MD \cap$м α, $P = \alpha \cap MB$.
5) AP, PN, NK, AK.
6) $APNK$ – искомое сечение.

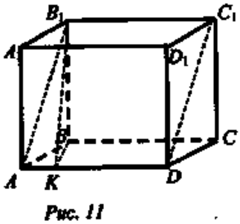


Рис. 11

2. *Дано:* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямой параллелепипед; $ABCD$ – основание (ромб); $\angle BAD = = 30°$; $AB = 18$, $BB_1 = 12$ (рис. 11).

Найти: $S_{AB_1C_1D}$.

Решение:

1) $S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot SIN\ \angle A = 182 \cdot \sin 30^\circ = 162.$

$S_{ABCD} = AD \cdot BK;\ 162 = 18 \cdot BK;\ BK = 9.$

2) ΔB_1KB: $B_1K^2 = B_1B^2 + BK^2$; $B_1K^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225$; $B_1K = 15$; $S_{сеч.} = AD \cdot B_1K = 18 \cdot 15 = 270.$

(*Ответ*: $S_{AB_1C_1D} = 270$.)

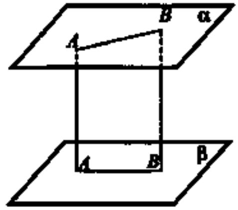


Рис. 12

3. *Дано:* $\alpha \parallel \beta$; $AB \parallel CD$ (рис. 12).

Найти: Каково взаимное расположение прямых AC и BD.

Решение: Пусть $AC \parallel BD$, тогда по свойству параллельных прямых $AC = BD \Rightarrow ABCD$ – параллелограмм $\Rightarrow AB \parallel CD$, что противоречит условию $\Rightarrow AC \parallel BD$. (*Ответ*: $AC \parallel BD$.)

III уровень

Вариант I

1. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед; $M \in AB$, $N \in AD$ (рис. 13а).

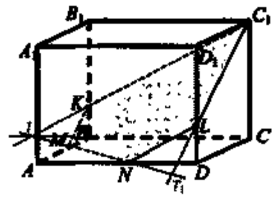


Рис. 13а

Построить: сечение.

Построение:

1) MN.
2) $MN \cap BC = T$.
3) $TC_1 \cap BB_1 = K$.
4) MK, KC_1.
5) $MN \cap CD = T_1$.
6) $T_1C_1 \cap DB_1 = L$.
7) NL.
8) LC_1.
9) MKC_1LN – искомое сечение.

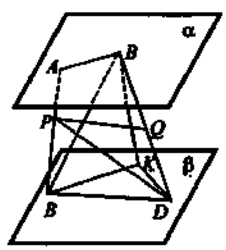


Рис. 15

2. *Дано:* $\alpha \parallel \beta$; AB – перпендикуляр; $AB = 3$ м; CD – наклонная, $CD - 5$ м; $AC = BD = 4$ м. (рис. 15).

Найти: PQ.

Решение:

1) ΔPAC – прямоугольный. Так как $PA \perp (\alpha) \Rightarrow \Rightarrow PA \perp AC$; $PC^2 = PA^2 + AC^2$; $PC^2 = 1{,}5^2 + + 4^2 = 18{,}25$;
2) ΔPBD – прямоугольный. Так как $PB \perp \beta \Rightarrow PB \perp BD$; $PD^2 = PB^2 + BD^2$; $PD^2 = 1{,}5^2 + 4^2 = 18{,}25$;
3) ΔDPC – равнобедренный $\Rightarrow PQ$ – медиана и высота;
4) ΔPQC – прямоугольный; $PQ^2 = PC^2 - CQ^2$; $PQ^2 = 18{,}25 - 6{,}25 = 12$; $PQ = 2\sqrt{3}$.

(*Ответ*: $PQ = 2\sqrt{3}$ м.)

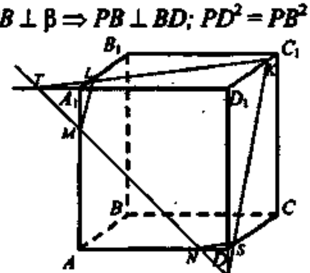


Рис. 14а

Вариант II

1. *Дано:* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед; $M \in AA_1$, $N \in AD$, $K \in D_1C_1$ (рис. 14а).

Построить: сечение.

Построение:

1) MN.
2) $MN \cap A_1D_1 = T$.
3) $TK \cap A_1D_1 = L$.
4) LK, LM.
5) $MN \cap DD_1 = T_1$.
6) $T_1K \cap DC = S$.
7) C_1S, NS. 8. $M \perp KSN$ – искомое сечение.

2. *Дано:* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед; P – середина отрезка B_1C; N – середина отрезка A_1B_1; $AD = a$, $AB = b$, $AA_1 = C$ (рис. 16).

Найти: D_1P, CN.

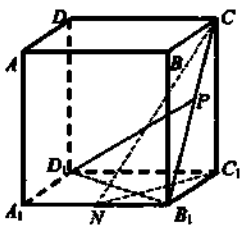


Рис. 16

Решение:

1) ΔB_1C_1C – прямоугольный: $CB_1^{\ 2} = a^2 + c^2$.
2) ΔD_1DC – прямоугольный: $D_1C = c^2 + b^2$.
3) $\Delta D_1B_1C_1$ – прямоугольный: $D_1B_1^{\ 2} = a^2 + b^2$.
4) ΔCD_1B_1: D_1P – медиана: $D_1P =$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(D_1B_1^{\ 2} + D_1C^2) - B_1C^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + a^2 + c^2 + b^2) - (a^2 + c^2)} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 + a^2 + c^2}.$$

5. ΔNB_1C_1 – прямоугольный: $C_1N^2 = \dfrac{b^2}{4} + a^2 = \dfrac{b^2 + 4a^2}{4}$.

6. ΔNCC_1 – прямоугольный: $CN^2 = NC_1^{\ 2} + CC_1^{\ 2} = \dfrac{b^2 + 4a^2}{4} + C^2 =$

$$= \frac{b^2 + 4a^2 + 4c^2}{4}\ CN = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4a^2 + 4c^2}.$$

(*Ответ*: $D_1P = \dfrac{1}{2}\sqrt{4b^2 + a^2 + c^2}$; $CN = \dfrac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4a^2 + 4c^2}$.)

Урок 24. Зачет № 1

Цели урока:

1) проверка теоретических знаний по теме;
2) выявление уровня усвоения основных геометрических понятий и умение применять их на практике.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока и сформулировать цели урока.

II. Устный опрос (задания со «*» предлагаются более сильным учащимся)

1. Какие плоскости называются параллельными? Привести наглядные примеры (определение).

2. Как читается признак параллельности плоскостей? (теорема)
3. Как используют этот признак на практике? (*Ответ*: а) чтобы распилить брус, так чтобы плоскости распилов были параллельны, на двух смежных гранях бруса прочерчивают $a_1 \parallel a$ и $b_1 \parallel b$ и по ним направляют движение пилы; б) чтобы получить горизонтальную плоскость, например, для фундамента здания, межэтажного перекрытия, футбольного поля и т.д. устанавливают по уровню, что этой плоскости принадлежат две пересекающиеся горизонтальные прямые a и b.)
4. Найдите ошибку в таком признаке: Две плоскости параллельны, если две прямые одной плоскости параллельны двум прямым другой плоскости. (*Ответ*: нет точки пересечения, следовательно, прямые могут быть параллельными линиям пересечения плоскостей.)
5. Что можно сказать о противоположных гранях прямоугольного параллелепипеда? (*Ответ*: параллельны, так как соответствующие пересекающиеся ребра одной грани параллельны пересекающимся ребрам другой грани.)

*6. *Дано:* $\alpha \parallel \beta$; $b \in \beta$ (рис. 1).
Доказать: $b \parallel \alpha$.
Доказательство:
1) Пусть $b \nparallel \alpha \Rightarrow b \cap \alpha = A$.
2) $A \in b \Rightarrow A \in \beta$; $A \in \alpha \Rightarrow \alpha \cap \beta$ по прямой b, что противоречит условию. Следовательно, $b \parallel \alpha$.

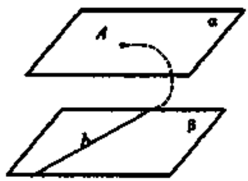


Рис. 1

7. Прямые a и b скрещивающиеся, провести через прямые a и b параллельные плоскости (объяснить ответ).
Дано: a, b – скрещивающиеся (рис. 2).
Построить: $\alpha \parallel \alpha_1$.
Построение: 1) $b_1 \parallel b$, $b_1 \cap a = A$.
2) $a_1 \parallel a$, $a_1 \cap b = A_1 \Rightarrow \alpha \parallel \alpha_1$.

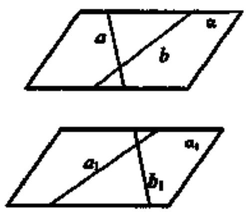


Рис. 2

*8. В треугольной пирамиде надо провести сечение через точку основания, параллельно боковой грани. Как определить положение секущей плоскости? (рис. 3).
Построение:
1) $(ABC) \cap (ASB) = AB \Rightarrow (ABC) \cap \alpha = l$; $l \parallel AB, P \in l$.
2) $\alpha \parallel (ASB)$; $AB \parallel QT$; $AB \cap AS \Rightarrow QS_1 \parallel AS$.
3) (QS_1T) – искомое сечение.

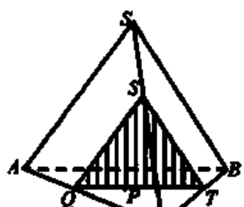


Рис. 3

9. Две стороны треугольника параллельны плоскости. Что можно сказать о третьей стороне? (*Ответ*: параллельна плоскости.)

*10. Плоскость, проведенная через середины ребер AD, DC и A_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, параллельна диагональному сечению AA_1C_1C (рис. 4).

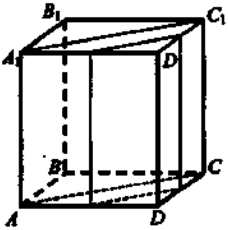


Рис. 4

Докажите: PQ – средняя линия $\Delta ADC \Rightarrow PQ \parallel AC$; PT – средняя линия $\Delta A_1D_1D \Rightarrow PT \parallel AA_1 \Rightarrow (PTQ) \parallel (AA_1C_1)$.

11. Ромб $ABCD$ и трапеция $BMNC$ не лежат в одной плоскости (рис. 5). Как расположены прямые MN и AD? (*Ответ*: параллельны.)

*12. Могут ли пересекаться плоскости (рис. 6), параллельные одной и той же прямой? (*Ответ:* Да. Прямая параллельна линии пересечения плоскостей.)

1) $c \parallel \alpha \Rightarrow a \parallel c$;

2) $c \parallel \beta \Rightarrow a \parallel c \Rightarrow a$ – линия пересечения α и β.

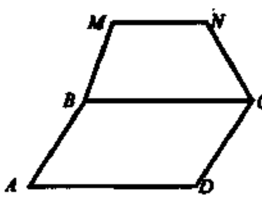


Рис. 5

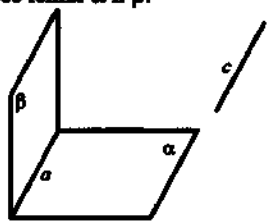


Рис. 6

Глава II

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

§ 1. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

(уроки 25–30)

Урок 25. Перпендикулярные прямые в пространстве. Параллельные прямые, перпендикулярные к плоскости

Цели урока:
1) ввести понятие перпендикулярных прямых в пространстве;
2) доказать лемму о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой;
3) дать определение перпендикулярности прямой и плоскости;
4) доказать теоремы, в которых устанавливается связь между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока и поставить цели.

II. Устная работа

1) Что такое перпендикулярные прямые на плоскости?

2) *Дано:* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед, $\angle BAD = 30°$ (рис. 1).

Найдите углы между прямыми AB и A_1D_1; A_1B_1 и AD; AB и B_1C_1. (30°, 30°, 150°).

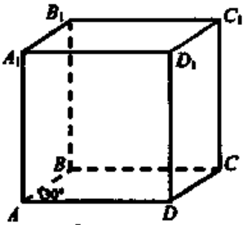


Рис. 1

III. Изучение нового материала

1) Рассмотрим модель куба. Как называются прямые AB и BC? (перпендикулярные). Найдите угол между прямыми AA_1 и DC; BB_1 и AD. Эти прямые тоже перпендикулярные.

Вводится понятие перпендикулярности двух прямых в пространстве.

В пространстве перпендикулярные прямые могут пересекаться и могут быть скрещивающимися.

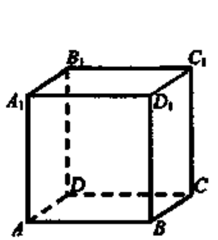


Рис. 2

Рассмотрим прямые AA_1, CC_1 и DC (рис. 2).

Прямая AA_1 параллельна прямой CC_1, а прямая CC_1 перпендикулярна прямой CD. Нами установлено, что AA_1 перпендикулярна CD.

– Сформулируйте это утверждение.

Лемма

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.

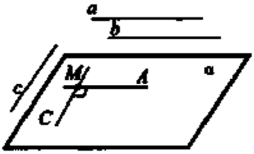


Рис. 3

Дано: $a \parallel b$, $a \perp c$ (рис. 3).

Доказать: $b \perp c$.

Доказательство:

Через точку M пространства, не лежащую на данных прямых, проведем прямые MA и MC, параллельные соответственно прямым a и c. Так как $a \perp c$, то $\angle AMC = 90°$ (рис. 3).

По условию $b \parallel a$, а по построению $a \parallel MA$, поэтому $b \parallel MA$. Итак, прямые b и c параллельны соответственно прямым MA и MC, угол между ними равен 90°. Это означает, что угол между прямыми b и c также равен 90°, то есть $b \perp c$. Лемма доказана.

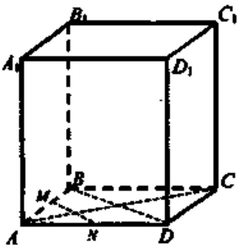


Рис. 4

2) Рассмотрим модель куба (рис. 4).

– Найдите угол между прямой AA_1 и прямыми плоскости (ABC): AB, AD, AC, BD, MN. (90°, 90°, 90°, 90°, 90°). Вывод: прямая AA_1 перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости (ABC). Такие прямые называются перпендикулярными.

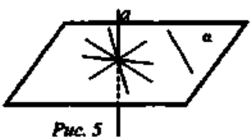


Рис. 5

Дается четкое определение прямой, перпендикулярной к плоскости. Вводится обозначение $a \perp \alpha$ (рис. 5).

3) *Доказать теорему:*

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.

Задача № 118

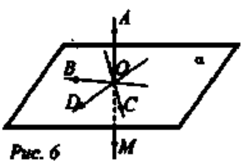


Рис. 6

Дано: α, B, C, D, $O \in \alpha$; A, M, $O \in a$, $a \perp \alpha$ (рис. 6).

Какие из углов $\angle AOB$, $\angle MOC$, $\angle DAM$, $\angle DOA$, $\angle BMO$ прямые?

Решение: Так как точка $O \in a$ и $O \in \alpha \Rightarrow a \cap \alpha =$ точка O; $\angle AOB$, $\angle MOC$, $\angle DOA$ – прямые.

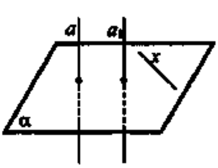


Рис. 7

Дано: $a \parallel a_1$, $a \perp \alpha$ (рис. 7).

Доказать: $a_1 \perp x$.

Доказательство:

$x \subset \alpha$, x – произвольная прямая. Из условия $a \perp \alpha$ следует (по определению перпендикулярности прямой и плоскости), что $a \perp x$; так как $a_1 \parallel a$ (по условию) и $a \perp x$, то (согласно лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой) $a_1 \perp x$.

Итак, прямая a перпендикулярна к произвольной прямой x, лежащей в плоскости α. А это означает, что $a_1 \perp \alpha$.

4) Доказать обратную теорему: если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны. Доказательство: рассмотрим прямые a и b, перпендикулярные к плоскости α. Докажем, что они параллельны.

Рис. 47(б) учебника на доске.

Через какую-нибудь точку M прямой b проведем прямую b_1, параллельную прямой a. По предыдущей теореме $b_1 \perp \alpha$. Докажем, что прямая b_1 совпадает с прямой b. Тем самым будет доказано, что $a \parallel b$. Допустим, что прямые b и b_1 не совпадаю. Тогда в плоскости β, содержащей прямые b и b_1,через точку M проходят две прямые, перпендикулярные к прямой c, по которой пересекаются плоскости α и β. Но это невозможно, следовательно, $a \parallel b$. Теорема доказана.

IV. Закрепление изученного материала

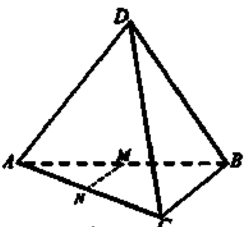


Рис. 8

Задача № 117

Дано: $DABC$ – тетраэдр; $M \in AB : AM = BM$, $N \in AC : AN = NC$; $BC \perp AD$ (рис. 8).

Доказать: $AD \perp MN$.

Доказательство:

1) MN – средняя линия $\Delta ABC \Rightarrow MN \parallel BC$;

2) по лемме, так как $BC \perp AD$, то $MN \perp AD$.

Задача № 120

Дано: $ABCD$ – квадрат, $AB = a$, $AC \cap BD = O$, $OK \perp (ABC)$, $OK = b$ (рис. 9).

Найти: AK, BK, CK, DK.

Решение:

1) $AK = BK = CK = DK$ следует из равенства. ΔAOK, ΔBOK, ΔCOK, ΔDOK равны по двум катетам (прямая OK перпендикуляр на к плоскости квадрата $ABCD$, $OK \perp AC$ и $OK \perp BD$);

2) $AO = R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$;

3) Из ΔAOK: $AK = \sqrt{KO^2 + OA^2}$,

$$AK = \sqrt{b^2 + \frac{2a^2}{4}} = \frac{\sqrt{4b^2 + 2a^2}}{2}.$$

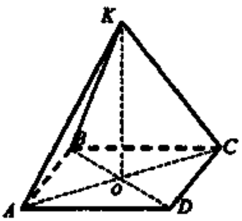


Рис. 9

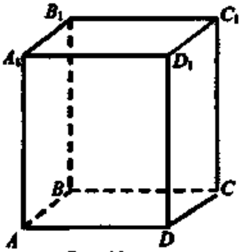


Рис. 10

Домашнее задание

1) п. 15–16, вопросы 1, 2 (стр. 54).

2) № 116, 118.

Задача № 116

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед; а) $\angle BAD = 90°$; б) $AB \perp DD_1$ (рис. 10).

Доказать:

а) $DC \perp B_1C_1$ и $AB \perp A_1D_1$;

б) $AB \perp CC_1$ и $DD_1 \perp A_1B_1$.

Доказательство:

а) 1) $\angle BAD = 90° \Rightarrow ABCD$ – прямоугольник; $DC \perp CB$; $DC \perp CC_1$ $\Rightarrow DC \perp (C_1CB) \Rightarrow DC \perp B_1C_1$.

2) $AB \perp AD$; $AB \perp AA_1 \Rightarrow AB \perp (AA_1D) \Rightarrow AB \perp A_1D_1$.

б) 1) $AB \perp BB_1$; $CC_1 \parallel BB_1 \Rightarrow AB \perp CC_1$ (по лемме).

2) $C_1D_1 \perp DD_1$; $A_1B_1 \parallel C_1D_1 \Rightarrow DD_1 \perp A_1B_1$ (по лемме).

Урок 26. Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Цели урока:

1) доказать признак перпендикулярности прямой и плоскости;
2) формировать навык применения признака перпендикулярности прямой и плоскости к решению задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока и сформулировать цели.

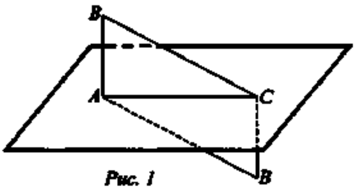


Рис. 1

II. Проверка домашнего задания

Проверка домашних задач по готовым чертежам. Три человека у доски готовят доказательство леммы и двух теорем. В это время класс работает устно по готовым чертежам.

1. *Дано:* $AB \perp \alpha$, $CD \perp \alpha$, $AB = CD$ (рис. 1).

Определить вид четырехугольника $ABCD$ (параллелограмм), так как по теореме п. 16 $AB \parallel CD$, а четырехугольник, у которого противолежащие стороны параллельны и равны, является параллелограммом.

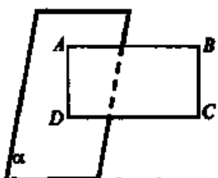


Рис. 2

2. *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм, $AB \perp \alpha$, $AC = 8$ (рис. 2).

Найти: BD.

($BD = 8$ см), так как $AB \perp \alpha$ и $AB \parallel DC$, то $CD \perp \alpha$. $ABCD$ – прямоугольник $\Rightarrow AC = BD$ и $BD = 8$.

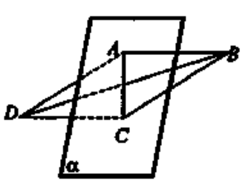


Рис. 3

3. *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм, $BD \perp \alpha$, $AB = 6$ (рис. 3).

Найти: P_{ABCD}.

(ромб, $P = 24$), так как $BD \perp \alpha \Rightarrow BD \perp AC \Rightarrow ABCD$ – ромб, $P = 4 \cdot 6 = 24$.

III. Изучение нового материала

А) Актуализация знаний

Задача № 119 а)

Дано: $OA \perp \alpha$, $OA = OD$ (рис. 4).

Доказать: $AB = DB$.

Доказательство: $OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp OB$ по определению перпендикулярности прямой и плоскости. BO – медиана и высота в $\Delta ABD \Rightarrow \Rightarrow \Delta ABD$ – равнобедренный $\Rightarrow AB = DB$.

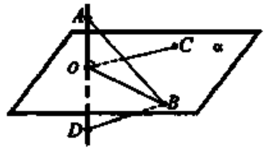


Рис. 4

Б) Верно ли утверждение:

«Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости». Ответ обоснуйте. (Нет, приводится контрпример; рис. 5, 6, 7.)

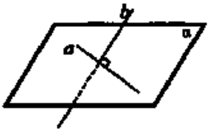


Рис. 5

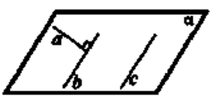


Рис. 6

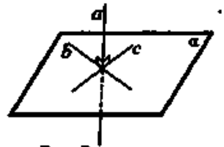


Рис. 7

Возьмем две прямые. Две прямые на плоскости могут быть параллельными или пересекающимися (рис. 6, 7).

Что вы замечаете? Сформулируйте признак перпендикулярности прямой и плоскости. Признак формулируется. Записываются условия и требования.

План доказательства (на доске).

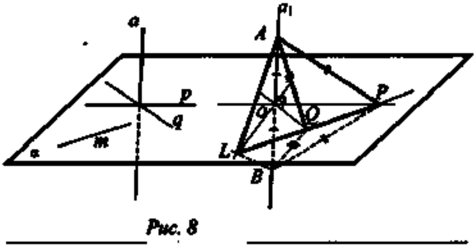


Рис. 8

1 этап. *Дано:* $a \perp OP$, $a \perp OQ$, $OL \subset \alpha$ (рис. 8).

Доказать: $a \perp OL$.

1) $AO = OB$.

2) $AP = BP$, $AQ = BQ$.

3) $\Delta APQ = \Delta BPQ$, поэтому $\angle APQ = \angle BPQ$.

4) $\Delta APL = \Delta BPL$, поэтому $AL = BL$.

5) В ΔABL медиана LO является высотой, то есть $AB \perp OL$ или $a \perp OL$.

2 этап. m – произвольная прямая плоскости α, $OL \parallel m$.

Так как $a \perp OL$, то $a \perp m$, и, следовательно, $a \perp \alpha$.

3 этап. *Дано:* $a \perp p$, $a \perp q$.

Доказать: $a \perp \alpha$.

1) $a_1 \parallel a$.

2) Так как $a_1 \perp \alpha$, то $a \perp \alpha$.

IV. Закрепление изученного материала

Задача № 121

(Указание: медиана, проведенная в прямоугольном треугольнике к гипотенузе, равна ее половине) (рис. 9).

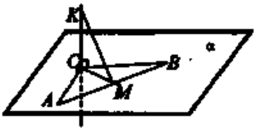


Рис. 9

Решение: $CK \perp (ABC) \Rightarrow CK \perp CM$, $AB = \sqrt{6^2+8^2} = 10$ (теорема Пифагора), $CM = 5$, $KM = 13$ (теорема Пифагора).

(Более сильные учащиеся решают задачу: Все грани параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – равные ромбы; углы между ребрами, имеющими общую точку A, равны. Выясните, перпендикулярна ли прямая A_1C прямой B_1D_1.)

Решение: Очевидно, что треугольники AA_1D_1 и AA_1B_1 равны, значит, $AB_1 = AD_1$. Пусть O – середина отрезка B_1D_1. Значит, прямая B_1D_1 перпендикулярна плоскости ACC_1, в которой лежат прямые A_1O и AO. Прямая A_1C также лежит в плоскости, поэтому прямые A_1C и B_1D_1 перпендикулярны.

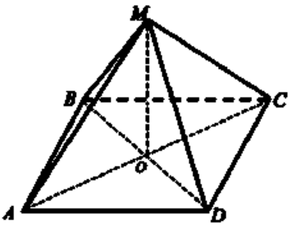


Рис. 10

Дано: $ABCD$ – параллелограмм, $AM = MC$, $BM = MD$ (рис. 10).

Доказать: $MO \perp (ABC)$.

Доказательство:

1) ΔAMC – равнобедренный; MO – медиана $\Rightarrow MO \perp AC$.
2) ΔBMD – равнобедренный; MO – медиана $\Rightarrow MO \perp BD$.
3) $MO \perp AC$, $MO \perp BD$, $AC \cap BD \Rightarrow \Rightarrow MO \perp (ABC)$.

V. Подведение итогов

Можно ли утверждать, что прямая, проходящая через центр круга, перпендикулярна:

а) диаметру (нет, по определению);

б) двум радиусам (нет, так как радиусы могут лежать на диаметре);

в) двум диаметрам (да, по определению).

Домашнее задание

1) п. 17;

2) № 124, 126.

3) ***Дополнительная задача***

В параллелепипеде $MPKHM_1P_1K_1H_1$ все грани – ромбы; $\angle M_1MH + \angle M_1MP = 180°$. Выясните, перпендикулярна ли прямая P_1H прямой MK.

(*Ответ:* да (задача решается аналогично задаче для сильных учащихся из классной работы.)

Задача № 124

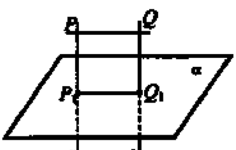


Рис. 11

Дано: $PQ \parallel \alpha$; $a \perp \alpha$, $b \perp \alpha$; $a \cap \alpha = P_1$, $b \cap \alpha = Q_1$ (рис. 11).

Доказать: $PQ = P_1Q_1$.

Доказательство:

1) $PP_1 \perp \alpha$, $QQ_1 \perp \alpha \Rightarrow PP_1 \parallel QQ_1$;

2) $PQ \parallel \alpha \Rightarrow PQ \parallel P_1Q_1$.

Значит, PQQ_1P_1 – параллелограмм $\Rightarrow PQ = P_1Q_1$.

Задача № 126

Дано: ΔABC; $BM \perp AB$, $BM \perp BC$; $D \in AC$ (рис. 12).

Найти: вид ΔMBD.

Решение:

1) $BM \perp BC$; $BM \perp AB \Rightarrow BM \perp (ABC)$.
2) $BM \perp (ABC) \Rightarrow BM \perp BD$. Значит, ΔMBD – прямоугольный.

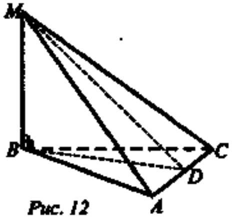


Рис. 12

Урок 27. Теорема о прямой, перпендикулярной к плоскости

Цели урока:

1) повторить признак перпендикулярности прямой и плоскости;
2) доказать теорему существования и единственности прямой, перпендикулярной плоскости.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока и сформулировать цели.

II. Повторение. Проверка домашнего задания

а) Сильный учащийся у доски повторяет доказательство признака перпендикулярности.

б) Проверяется решение дополнительной задачи.

в) Слабый учащийся по карточке на первой парте решает задачу:
В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AC = 12$ см, $BC = 16$ см, CM – медиана. Через вершину C проведена прямая CK, перпендикулярная к плоскости треугольника ABC, $CK = 24$ см. Найти KM. (26 см).

г) Фронтальный опрос учащихся по формулировкам из пунктов 15–17 и работа по готовым чертежам:

1. Сформулировать лемму о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой.
2. Какая прямая называется перпендикулярной к плоскости?
3. Сформулировать теоремы, которые устанавливают связь между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости.
4. Сформулировать признак перпендикулярности прямой и плоскости.
5. Можно ли утверждать, что прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна лежащим в этой плоскости: двум сторонам треугольника (да); двум сторонам квадрата (нет); диагоналям параллелограмма (да) (рис. 1).

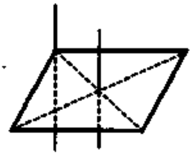


Рис. 1

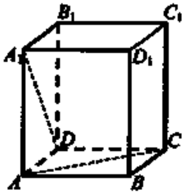


Рис. 2

6. Дано: $ABCD$ – куб (рис. 2).

Заполните пропуски о взаимном расположении прямых и плоскостей: $CC_1...(DCB)$; $AA_1...(DCB)$; $D_1C_1...(DCB)$; $B_1C_1...(DD_1C_1)$; $B_1C_1...DC_1$; $A_1D_1...DC_1$; $BB_1...AC$; $A_1B...BC$; $A_1B...DC_1$.

III. Изучение нового материала

Формулируется и записывается в тетрадь теорема существования и единственности плоскости, проходящей через любую точку пространства перпендикулярно к данной прямой (это задача № 133 учебника). Доказательство разбирается учащимися самостоятельно по учебнику (стр. 40).

– Сформулируйте обратную теорему.

Записывается и доказывается теорема: через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна (используется рис. 50 учебника).

IV. Закрепление изученного материала

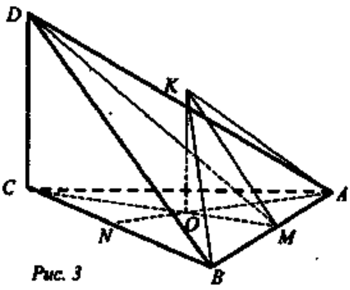


Рис. 3

Задача № 122 (рис. 3)

Найти: AK, DA, BD.

Решение:

1. $BD = AD$, так как $\Delta BCD = \Delta ACD$ (как прямоугольные, по двум катетам).
2. $AD = \sqrt{16^2 + (16\sqrt{3})^2} = \sqrt{16^2 \cdot 4} = 16 \cdot 2 = 32$ см.
3. $AK = BC$, так как $\Delta AOK = \Delta BOK$ (как прямоугольные, по двум катетам).
4. $AO = OB = OC = \dfrac{AB}{\sqrt{3}} = 16$ см.
5. $AK = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$ см.

(*Ответ*: $AK = BK = 20$ см; $AD = BD = 32$ см.)

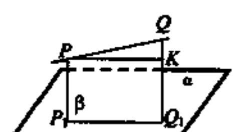


Рис. 4

Задача № 125 (рис. 4).

Найти: P_1Q_1.

Решение:

1. $(PP_1 \perp \alpha,\ QQ_1 \perp \alpha) \Rightarrow PP_1 \perp QQ_1$.
2. $(PP_1, QQ_1) = \beta$, $\alpha \cap \beta = P_1Q_1$.
3. $QK = 33{,}5 - 21{,}5 = 12$ см.
4. $P_1Q_1 = PK = 9$ см.

1) *Дано:* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед; $AD = 9$ дм; $DC = 8$ дм; $DB_1 = 17$ дм (рис. 5).

Найти: $S_{BB_1D_1D}$.

Решение: ΔADB: $\angle BAD = 90°$; $AB = DC = 8$ дм. По теореме Пифагора $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2}$; $BD = \sqrt{8^2 + 9^2} = \sqrt{64 + 81} = \sqrt{145}$ (дм). ΔB_1BD: $\angle B_1BD = 90°$. По теореме Пифагора $BB_1 = \sqrt{B_1D^2 + AD^2}$; $BB_1 = \sqrt{17^2 - (\sqrt{145})^2} = \sqrt{289 - 145} = \sqrt{144} = 12$ (дм). $S_{\text{сеч.}} = B_1B \cdot BD$. $S_{\text{сеч.}} = 12\sqrt{145}$ (дм^2).

(*Ответ*: $12\sqrt{145}$ дм^2.)

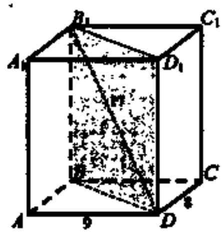


Рис. 5

2) *Дано:* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед; $AD_1 = 8$ м; $DC_1 = 10$ м; $DB = 12$ м (рис. 6).

Найти: AD, DC, DD_1.

Решение: Обозначим $AD = x$ (м); $DD_1 = z$ (м); $DC = y$ (м). Из ΔAA_1D: по теореме Пифагора $A_1D^2 = AA_1^2 + AD^2$; $18^2 = x^2 + z^2$. Из Δ DCC_1: по теореме Пифагора $DC_1^2 = DC^2 + CC_1^2$; $10^2 = y^2 + z^2$. Из ΔABD: по теореме Пифагора $BD^2 = AB^2 + AD^2$; $12^2 = x^2 + y^2$, получим систему:

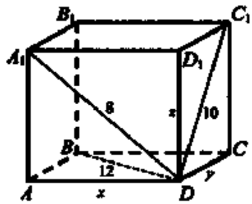


Рис. 6

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 144; \\ y^2 + z^2 = 100; \\ x^2 + z^2 = 64; \end{cases} \begin{cases} x^2 = 144 - y^2; \\ 144 - y^2 + z^2 = 64; \\ y^2 + z^2 = 100; \end{cases} \begin{cases} x^2 = 144 - y^2; \\ z^2 - y^2 = -80; \\ y^2 + z^2 = 100; \end{cases}$$

Сложим почленно 2 и 3 уравнения.

$$\begin{cases} x^2 = 144 - y^2; \\ 2z^2 = 20; \\ y^2 + z^2 = 100; \end{cases} \begin{cases} x^2 = 144 - y^2; \\ z^2 = 10; \\ y^2 + z^2 = 100; \end{cases} \begin{cases} x^2 = 144 - y^2; \\ z = \sqrt{10}; \\ y^2 + 10 = 100; \end{cases} \begin{cases} x^2 = 144 - y^2; \\ z = \sqrt{10}; \\ y^2 = 90; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 144 - y^2; \\ z = \sqrt{10}; \\ y = 3\sqrt{10}; \end{cases} \begin{cases} x^2 = 144 - y^2; \\ z = \sqrt{10}; \\ y = 3\sqrt{10}; \end{cases} \begin{cases} x^2 = 54; \\ z = \sqrt{10}; \\ y = 3\sqrt{10}; \end{cases} \begin{cases} x = 3\sqrt{6}; \\ z = \sqrt{10}; \\ y = 3\sqrt{10}. \end{cases}$$

(*Ответ*: $3\sqrt{6}$ м; $3\sqrt{10}$ м; $\sqrt{10}$ м.)

V. Подведение итогов

Смоделируйте в классной комнате описанную ниже ситуацию: Три луча OM, OK, OT попарно перпендикулярны. Как расположен каждый из лучей по отношению к плоскости, определяемой двумя другими лучами? (Угол; перпендикулярно). ____________________

Домашнее задание

1) пункт 18.
2) № 123, 127.

Дополнительная задача

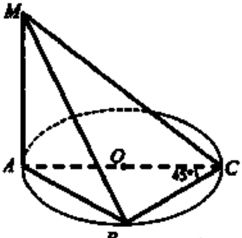


Рис. 7

Точка *A* принадлежит окружности, *AK* – перпендикуляр к ее плоскости, *AK* = 1 см, *AB* – диаметр, *BC* – хорда окружности, составляющая с *AB* угол 45°. Радиус окружности равен 2 см. Докажите, что треугольник *KBC* прямоугольный, и найдите *KC*. (3 см.)

Дано: окружность (O; R = 20 см); BC – хорда, AB – диаметр; $\angle ABC = 45°$, $AK = 1$ см; $AK \perp (ABC)$ (рис. 7).

Доказать: ΔKBC – прямоугольный.

Найти: KC.

Решение:

1) $\angle ACB$ вписан в окружность, опирается на диаметр $AB \Rightarrow \angle ABC = 90° \Rightarrow \Rightarrow \Delta ACB$ – прямоугольный и равнобедренный.
2) $R = OA = 2$ см $\Rightarrow AB = 4$ см. По теореме Пифагора $AC = BC = 2\sqrt{2}$ см.
3) $AK \perp (ABC) \Rightarrow AK \perp AC$ и $AK \perp AB$.
4) $KB = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$ см.
5) $KC = \sqrt{1^2 + (2\sqrt{2})^2} = 3$ см.
6) В ΔKCB $(\sqrt{17})^2 = 3^2 + (2\sqrt{2})^2$; $17 = 17$. Значит, ΔKCB – прямоугольный (по теореме, обратной теореме Пифагора).

(*Ответ*: 3 см.)

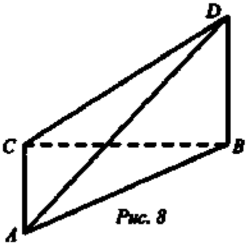


Рис. 8

Задача № 127

Дано: ΔABC; $\angle A + \angle B = 90°$; $BD \perp (ABC)$ (рис. 8.)

Доказать: $CD \perp AC$.

Доказательство:

1) $\angle A + \angle B = 90° \Rightarrow \angle C = 90°$; ΔABC – прямоугольный.
2) $BD \perp (ABC) \Rightarrow BD \perp AC$; $BC \perp AC$; $BD \perp BC$ $\Rightarrow AC \perp (CBD)$. Значит, $AC \perp DC$.

Урок 28. Решение задач на перпендикулярность прямой и плоскости

Цели урока:

1) закрепить вопросы теории по теме «Перпендикулярность прямой и плоскости»;
2) выработать навыки решения основных типов задач на перпендикулярность прямой и плоскости.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему и план урока.

II. Актуализация знаний учащихся

1) Теоретический опрос.

Сформулировать и доказать теорему о прямой, перпендикулярной к плоскости (подготовиться у доски одному из учащихся, затем заслушать его ответ всем классом).

2) Индивидуальные письменные задания:
   - доказать теорему о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей (1 ученик);
   - доказать теорему, устанавливающую связь между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости (1 ученик);
   - доказать теорему, обратную к теореме, устанавливающей связь между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости (1 ученик);
   - доказать признак перпендикулярности прямой и плоскости (1 ученик).

3) Самостоятельное решение задач по готовым чертежам с последующей проверкой и обсуждением по необходимости.

I уровень: № 1, 2, 5.

II уровень: № 3, 4, 6.

Точка *M* лежит вне плоскости *ABC*.

1. Рис. 1. Доказать: прямая *AC* перпендикулярна плоскости *AMB*.
2. Рис. 2. *BMDC* – прямоугольник. Доказать: прямая *CD* перпендикулярна плоскости *ABC*.
3. Рис. 3. *ABCD* – прямоугольник. Доказать: $AD \perp AM$.

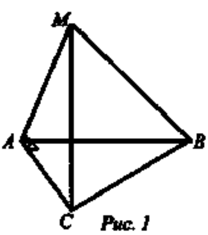


Рис. 1

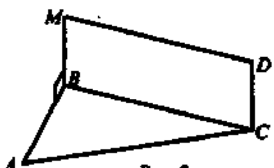


Рис. 2

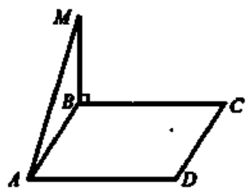


Рис. 3

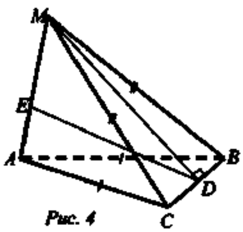


Рис. 4

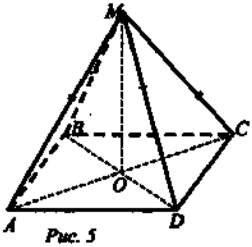


Рис. 5

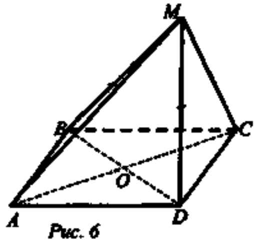


Рис. 6

Решение к задачам 1–6.

4. Рис. 4. Доказать: $BC \perp DE$.

5. Рис. 5. $ABCD$ – параллелограмм. Доказать: прямая MO перпендикулярна плоскости ABC.
6. Рис. 6. $ABCD$ – ромб. Доказать: прямая BD перпендикулярна плоскости AMC.

№ 1

Доказательство:

$AC \perp AB$ (по условию), $AC \perp AM$ (по условию),

$$\left.\begin{array}{l} AB \subset (AMB) \\ AM \subset (AMB) \\ AB \subset AM = A \end{array}\right| \Rightarrow \mathrm{AC} \perp (\mathrm{AMB})$$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

№ 2

Доказательство:

Так как $BMDC$ – прямоугольник, то $\angle MBC = 90°$, значит,

$$\left.\begin{array}{l} MB \perp BC, BC \subset (ABC) \\ MB \perp MB \text{ (по условию)}, AB \subset (ABC) \\ BC \cap AB = B \end{array}\right| \Rightarrow$$ $MB \perp (ABC)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

$MB \parallel DC$ (по свойству сторон прямоугольника). Следовательно, $DC \perp (ABC)$ (по теореме о связи между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости).

№ 3

Доказательство:

1) Так как $ABCD$ – прямоугольник, то $\angle ABC = 90°$, значит, $BC \perp AB$, $AB \subset (ABM)$

$$\left.\begin{array}{l} BC \perp MB, MB \subset (ABC) \\ AB \cap MB = B \end{array}\right| \Rightarrow$$ $BC \perp (AMB)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

2) $BC \parallel AD$ (по свойству сторон прямоугольника). Следовательно, $AD \perp (AMB)$ (по теореме о связи между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости).

3) $$\left.\begin{array}{l} AM \subset (AMB) \\ AD \perp (AMB) \end{array}\right| \Rightarrow$$ $AD \perp AM$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости).

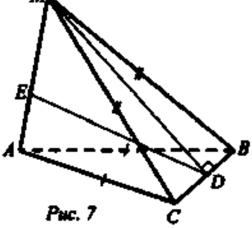


Рис. 7

№ 4 (рис. 7)

Доказательство: Так как ΔCMB – равнобедренный (по условию) и MD – высота, то MD – медиана (по свойству высоты равнобедренного треугольника).

Значит, $CD = BD$ (по определению медианы).

1) Так как ΔABC – равнобедренный (по условию) и AD – медиана (по определению), то AD высота (по свойству медианы равнобедренного треугольника). Значит, $BC \perp AD$.

2) $$\left.\begin{array}{l} BC \perp MD, MD \subset (AMD) \\ BC \perp AD, ADC \subset (AMD) \\ MD \cap AD = D \end{array}\right| \Rightarrow$$ $BC \perp (AMD)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

3) $\left.\begin{array}{l} DE \subset (AMD) \\ BC \perp (AMD) \end{array}\right| \Rightarrow$ $BC \perp DE$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости).

№ 5

Доказательство:

1) $AC \cap BD = O$: $AO = OC$, $BO = OD$ (по свойству диагоналей параллелограмма).
2) ΔBMD – равнобедренный (по условию) и MO – медиана (по определению), значит, MO – высота (по свойству медианы равнобедренного треугольника).

Следовательно, $MO \perp BD$.

3) В ΔAMC : $MO \perp AC$ (доказывается аналогично п. 2).
4) $\left.\begin{array}{l} MO \perp BD, BD \subset (ABC) \\ MO \perp AC, AC \subset (ABC) \\ BD \cap AC = O \end{array}\right| \Rightarrow$ $\Rightarrow MO \perp (ABC)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

№ 6 (рис. 8)

Доказательство: $AC \perp BD$ и $AO = OC$, $BO = OD$ (по свойству диагоналей ромба). ΔBMD – равнобедренный (по условию) и MO – медиана (по определению), значит, MO – высота (по свойству медианы равнобедренного треугольника).

Следовательно, $MO \perp BD$.

$\left.\begin{array}{l} BD \perp AC, AC \subset (AMC) \\ BD \perp MO, MO \subset (AMC) \\ AC \cap MO = O \end{array}\right| \Rightarrow BD \perp (AMC)$

(по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

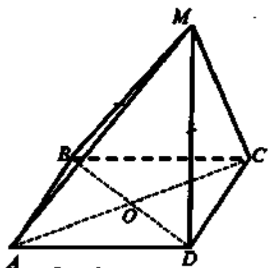


Рис. 8

III. Решение задач

Решение письменно на доске и в тетрадях задачи № 130 (подробное решение в учебнике), № 134 (с помощью учителя), к доске вызвать сильного ученика.

№ 130

(Прежде чем приступать к решению задачи, повторить понятия: расстояние между двумя точками и расстояние от точки до прямой. Сформулировать определения этих понятий.)

Дано: $ABCD$ – квадрат; MB – прямая $MB \cap (ABCD) = B$, $\angle MBA = \angle MBC = 90°$; $MB = m$, $AB = n$ (рис. 9).

Найти: а) MA, MD, MC; б) ρ (M; AC), ρ (M; BD).

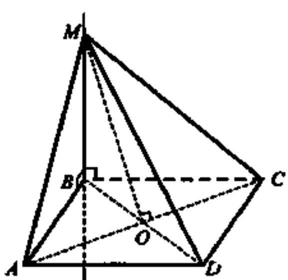


Рис. 9

Решение:

1) $AB = BC = CD = AD = n$ (по свойству сторон квадрата).
2) ΔABM и ΔCBM – прямоугольные, так как $\angle MBA = \angle MBC = 90°$.

По теореме Пифагора: $AM^2 = BM^2 + AB^2$ (ΔABM); $MC^2 = BM^2 + CB^2$ (ΔCBM). Получим, $AM^2 = m^2 + n^2$, $AM = \sqrt{m^2 + n^2}$; $MC^2 = m^2 + n^2$, $MC = \sqrt{m^2 n^2}$.

3) Так как BD – диагональ квадрата, то $BD = AB\sqrt{2} = n\sqrt{2}$.

4) Так как $\angle MBA = \angle MBC = 90°$, то

$$\left.\begin{array}{l} MB \perp BC, BC \subset (ABC) \\ MB \perp AB, AB \subset (ABC) \\ BC \cap AB = B \end{array}\right| \Rightarrow$$ $MB \perp (ABC)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

Значит, $MB \perp BD$, $BD \subset (ABC)$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости).

5) ΔMBD – прямоугольный (т.к. $MB \perp BD$, то $\angle MBD = 90°$). По теореме Пифагора: $MD^2 = MB^2 + BD^2$, $MD^2 = m^2 + 2n^2$, $MD = \sqrt{m^2 + 2n^2}$.

6) ρ (M; BD) = MB (по определению расстояния от точки до прямой). Значит, ρ (M; BD) = m.

7) $AO = OC$, $BO = OD$ (по свойству диагоналей квадрата). Так как $AM = MC = \sqrt{m^2 + n^2}$, то ΔAMC – равнобедренный (по определению) и MO – медиана (по определению), значит, MO – высота (по свойству медианы равнобедренного треугольника, проведенной к его основанию). Следовательно, $MO \perp AC$.

8) ΔMBO – прямоугольный (так как $MB \perp BD$, то $\angle MBO = 90°$). $BO = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}n\sqrt{2} = \frac{n\sqrt{2}}{2}$. По теореме Пифагора: $MO^2 = BO^2 + BM^2$.

$MO^2 = \frac{2n^2}{4} + m^2 = \frac{2n^2 + 4m^2}{4}$, $MO = \frac{\sqrt{2n^2 + 4m^2}}{2}$.

9) $MO = \rho$ (M; AC) (по определению расстояния от точки до прямой). $\rho(M; AC) = \frac{\sqrt{2n^2 + 4m^2}}{2}$.

(*Ответ*: а) $\sqrt{m^2 + n^2}$; $\sqrt{m^2 + 2n^2}$; $\sqrt{m^2 + n^2}$. б) $\frac{\sqrt{2n^2 + 4m^2}}{2}$; m.)

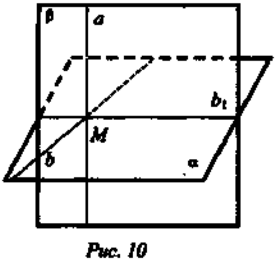


Рис. 10

№ 134

(Учитель должен сформулировать идею решения задачи, если это необходимо.)

Дано: a, $M \in a$; α, $M \in \alpha$, $a \perp \alpha$; b, $M \in b$, $a \perp b$ (рис. 10).

Доказать: $b \subset \alpha$. (В ходе решения задачи учащимися следует задавать наводящие и уточняющие вопросы.)

Доказательство:

Предположим, что $b \not\subset \alpha$ (Что определяют две пересекающиеся прямые?)

По теореме о плоскости, проходящей через две пересекающиеся прямые, существует плоскость β, проходящая через прямые a и b. (Каково взаимное расположение плоскостей α и β?) $\beta \cap \alpha = b_1$, $M \in b_1$, $b_1 \neq b$. Так как $a \perp \alpha$ и $b_1 \subset \alpha$, то $a \perp b_1$ (по определению прямой перпендикулярной плоскости). Получим, $\left.\begin{array}{l} b \subset \beta, a \perp b, M \in b \\ B_1 \subset \beta, a \perp b_1, M \in b_1 \end{array}\right| \Rightarrow$ противоречие. Значит, $b \subset \alpha$.

IV. Подведение итогов

Домашнее задание

1) Повторить материалы § 1, с. 34–38.
2) Решить задачи: № 129, 136.

Дополнительная задача

Дан ΔABC, $AB = AC = BC$, $CD \perp (ABC)$, $AM = MB$, $DM = 15$, $CD = 12$. Найти площадь ΔADB.

Урок 29. Решение задач на перпендикулярность прямой и плоскости

Цели урока:

1) закрепить знания, умения и навыки учащихся по теме «Перпендикулярность прямой и плоскости»;
2) совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

1. Проверка домашнего задания.

№ 129 – устно по заранее подготовленному чертежу;

№ 136 – решение подготовить на доске.

Дополнительную задачу проверить индивидуально у нескольких учеников.

Задача № 129

Дано: $ABCD$ квадрат; AM – прямая; $AM \perp (ABCD)$; $AC \cap BD = O$ (рис. 1).

Доказать: а) $BD \perp (AMO)$; б) $MO \perp BD$.

Доказательство:

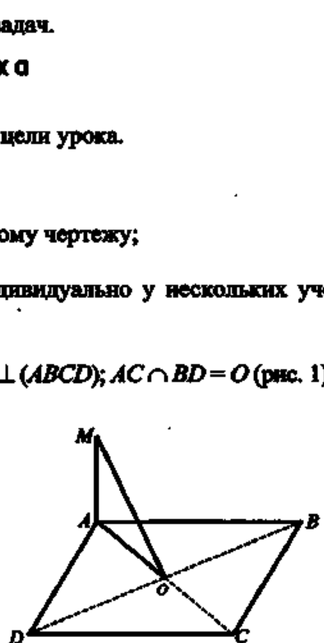


Рис. 1

1) Так как $MA \perp (ABCD)$, то $MA \perp BD$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости). $BD \perp AC$ (по свойству диагоналей квадрата). $MA \subset (MAO)$ и $AC \subset (MAO)$, $MA \cap AC = A$. Следовательно, $BD \perp (MAO)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).
2) Так как $BD \perp (MAO)$, то $BD \perp MO$, $MO \subset (MAO)$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости).

Задача № 136

Дано: AB – отрезок; α; $AB \perp \alpha$; O – середина AB, $O \in \alpha$; $XA = XB$. (рис. 2).

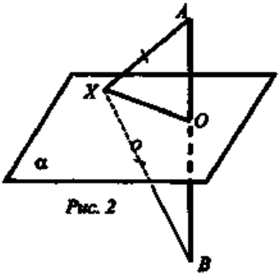


Рис. 2

Доказать: $X \in \alpha$.

Доказательство:

1) Если $X \in AB$, то $X = O$, и поэтому $X \in \alpha$.
2) Если $X \notin AB$, то XO – медиана ΔAXB. ΔAXB – равнобедренный (по определению), значит, XO – высота (по свойству медианы равнобедренного треугольника), то есть $XO \perp AB$. Таким образом, $O \in XO$, $O \in AB$ и $XO \perp AB$, следовательно, $XO \subset \alpha$ (по задаче № 134) и $X \in \alpha$.

Дополнительная задача

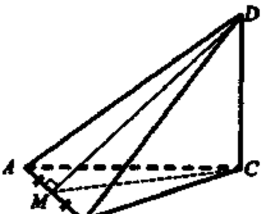


Рис. 3

Дано: ΔABC; $AB = AC = BC$; $CD \perp (ABC)$; $AM = MB$, $DM = 15$, $CD = 12$ (рис. 3).

Найти: $S\Delta ADB$.

Решение:

1) $CD \perp (ABC) \Rightarrow CD \perp AC$ и $CD \perp BC$, то есть $\angle ACD = \angle BCD = 90°$ и ΔADC, ΔBDC – прямоугольные.
2) $\Delta ADC = \Delta BDC$ (по двум катетам): DC – общий, $AC = BC$ (по условию). Значит, $AD = BD$ (как соответствующие в равных треугольниках), тогда ΔADB – равнобедренный (по определению) и DM – медиана. Следовательно, DM – высота (по свойству медианы равнобедренного треугольника).
3) $DC \perp MC \Rightarrow \angle DCM = 90°$ и ΔMCD – прямоугольный. По теореме Пифагора: $MD^2 = DC^2 + MC^2$. Тогда $MC = \sqrt{DM^2 - DC^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$.
4) ΔMCB – прямоугольный ($\angle CMB = 90°$, так как CM – медиана и высота в ΔABC – равностороннем), $\angle B = 60°$. $\sin \angle B = \dfrac{MC}{BC}$, тогда

$$BC = \frac{MC}{\sin 60°} = \frac{9}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{18}{\sqrt{3}} = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3},\ AB = BC \text{ (по условию).}$$

5) $S_{\Delta ADB} = \dfrac{1}{2} DM \cdot AB$, $S_{\Delta ADB} = \dfrac{1}{2} \cdot 15 \cdot 6\sqrt{3} = 45\sqrt{3}$.

(*Ответ*: $45\sqrt{3}$.)

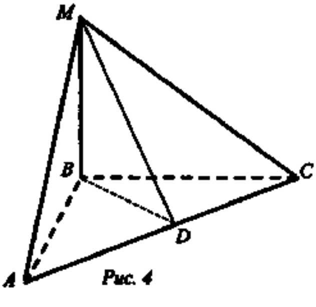


Рис. 4

2. Решить самостоятельно задачу (выполняют учащиеся, у которых нет вопросов по домашнему заданию).

Дан тетраэдр $MABC$, угольный, где $D \in AC$, $MB \perp AB$. Найдите MD и S_{MBD}, если $MB = BD = a$.

Дано: $MABC$ – тетраэдр; $MB \perp AB$, $MB \perp BC$; $D \in AC$, $MB = BD = a$ (рис. 4).

Доказать: ΔMBD – прямоугольный.

Найти: MD; S_{MBD}.

Решение: Так как $MB \perp AB$, $MB \perp BC$ и $AB \cap BC = B$; $AB \subset (ABC)$, $BC \subset (ABC)$, то $MB \perp (ABC)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

Значит, $MB \perp BD$, $BD \subset (ABC)$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости), то есть $\angle MBD = 90°$, а значит, ΔMBD – прямоугольный.

2) ΔMBD, по теореме Пифагора: $MD^2 = BM^2 + BD^2$, $MD^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, $MD = a\sqrt{2}$.

3) $S_{\Delta MBD} = \dfrac{1}{2} MB \cdot BD$, $S_{\Delta MBD} = \dfrac{1}{2} a \cdot a = \dfrac{a^2}{2}$.

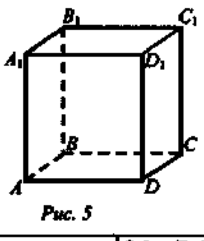
(*Ответ*: $a\sqrt{2}$; $\dfrac{a^2}{2}$.)

III. Математический диктант

I уровень

Ответы записать на листочек и в тетрадь.

Листочек сдается на проверку учителю, а тетрадь остается для самопроверки, которая будет проведена непосредственно по окончанию работы.

Вариант I	***Вариант II***
1. Закончите предложение, чтобы получилось верное утверждение. Сделайте рисунок.	
1.1. Две прямые называются перпендикулярными, если… 1.2. Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она… 1.3. Если две плоскости перпендикулярны прямой, то они…	1.1. Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если… 1.2. Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости… 1.3. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая…
2. Ответьте на вопрос	
2.1. Сколько перпендикуляров можно провести через данную точку к данной прямой на плоскости?	2.1. Сколько перпендикуляров можно провести через данную точку к данной прямой в пространстве?
3. Выпишите  *Рис. 5*	
3.1. Ребра, перпендикулярные плоскости (DCC_1). 3.2. Плоскости, перпендикулярные ребру BB_1.	3.1. Ребра, перпендикулярные плоскости (ABB_1). 3.2. Плоскости, перпендикулярные ребру A_1D_1.

4. Используя символы ‖ и ⊥, запишите, как расположены прямая и плоскость (по рис.5 из п. 3). Докажите.	
4.1. CC_1 и DCB 4.2. D_1C_1 и DCB	4.1. AA_1 и DCB 4.2. B_1C_1 и DCB
5. $AB \perp \alpha$, $CD \perp \alpha$, $B \in \alpha$, $D \in \alpha$, $AB = CD$. *Каково взаимное положение прямой AC и плоскости α? Ответ обоснуйте.*	*5. $AB \perp \alpha$, $CD \parallel AB$ ($B \in \alpha$, $D \in \alpha$), $E \in \alpha$, $\angle ECD = 40°$. Тогда чему равны $\angle CED$? Ответ обоснуйте.*

Ответы к заданиям математического диктанта

Вариант I	*Вариант II*
1.1. Угол между ними равен 90°. 1.2. Перпендикулярна и другой. 1.3. Параллельны. 2.1. Один. 3.1. AD, A_1D_1, BC, B_1C_1. 3.2. ABC и $A_1B_1C_1$. 4.1. $CC_1 \perp (DCB)$. 4.2. $D_1C_1 \parallel (DCB)$. 5. $AC \parallel \alpha$.	1.1. Она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости. 1.2. Параллельны. 1.3. Перпендикулярна плоскости. 2.1. Один. 3.1. AD, A_1D_1, BC, B_1C_1. 3.2. AA_1B_1 и DD_1C_1. 4.1. $AA_1 \perp (DCB)$. 4.2. $B_1C_1 \parallel (DCD)$. 5. $\angle CED = 50°$.

II уровень

С самопроверкой по подготовленному решению задач.

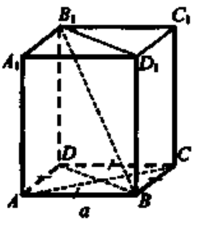


Рис. 6

№ 1. Основанием прямоугольного параллелепипеда является квадрат со стороной, равной a. Расстояние от бокового ребра до скрещивающейся с ним диагонали параллелепипеда равно… (рис. 6).

Найти: $\rho(AA_1; B_1D)$.

Решение:

1) $B_1D \subset (BB_1D_1)$; $AA_1 \parallel BB_1 \Rightarrow AA_1 \parallel (BB_1D_1)$ (по признаку параллельности прямой и плоскости); $\rho(AA_1; B_1D) = \rho(AA_1; (BB_1D_1)) = \rho(AA_1; BD)$.

2) Так как $ABCD$ – квадрат, то $AC \perp BD$, то есть

$AO \perp BD$, где $AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

3) $AO = \rho(AA_1; BD) = \rho(AA_1; B_1D) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

(*Ответ*: $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.)

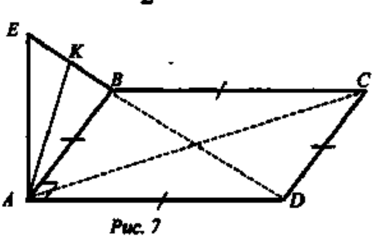


Рис. 7

№ 2. $ABCD$ – квадрат (рис. 7). AE – перпендикулярно плоскости квадрата, $K \in BE$. Чему равен угол между BC и AK?

Найти: $\angle(BC; AK)$.

Решение:

1) Так как BC и AK – скрещивающиеся прямые, то $\angle(BC,$

$AK) = \angle(AK; AD)$, т.к. $BC \parallel AD$ (по свойству сторон квадрата).

2) $AE \perp AD$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости), $AB \perp AD$, т.к. $\angle BAD = 90°$, $AE \cap AB = A$, значит, $AD \perp (ABE)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

3) Так как $AD \perp (ABE)$, то $AD \perp AK$, $AK \subset (ABE)$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости). Значит, $\angle(AK, AD) = \angle KAD = 90°$.

(*Ответ*: 90°.)

IV. Решение задач

Задача 1

Отрезок AB пересекает некоторую плоскость в точке O. Прямые AD и BC, перпендикулярные этой плоскости, пересекает ее в точках D и C соответственно. $AD = 6$ см, $BC = 2$ см, $OC = 1{,}5$ см. Найдите AB.

Дано: α; AB– отрезок; $AB \cap \alpha = O$; $AD \perp \alpha$, $BC \perp \alpha$; $AD \cap \alpha = D$, $BC \cap \alpha = C$; $AD = 6$ см, $BC = 2$ см, $OC = 1{,}5$ см (рис. 8).

Найти: AB.

Решение:

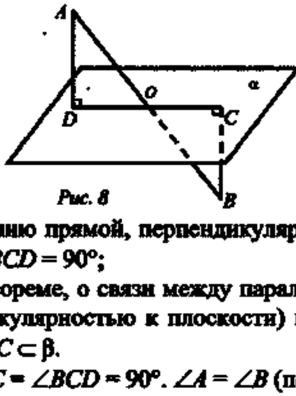


Рис. 8

1. Так как

$$\left.\begin{array}{l} AD \cap \alpha = D, \text{ то } D \in \alpha \\ BC \cap \alpha = C, \text{ то } C \in \alpha \end{array}\right| \Rightarrow DC \subset \alpha.$$

2. Так как $AD \perp \alpha$, $BC \perp \alpha$, а $DC \subset \alpha$, то
   а) $AD \perp DC$ и $BC \perp DC$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости). Значит, $\angle ADC = \angle BCD = 90°$;
   б) $AD \parallel BC$ (по теореме, обратной к теореме, о связи между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости) и существует плоскость β: $AD \subset \beta$ и $BC \subset \beta$.

3. ΔADO и ΔBCO – прямоугольные, $\angle ADC = \angle BCD = 90°$. $\angle A = \angle B$ (по свойству накрест лежащих углов, образованных параллельными прямыми AD и BC и секущей AB) $\Rightarrow \Delta\ ADO \sim \Delta BCO$. Тогда $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{OD}{OC}$ (по определению подобных треугольников) $\dfrac{6}{2} = \dfrac{OD}{1{,}5}$,

$$OD = \frac{6 \cdot 1{,}5}{2} = 4{,}5 \text{ (см)}.$$

4. В ΔADO, по теореме Пифагора: $AO^2 = AD^2 + DO^2$, $AO^2 = 36 + 20{,}25$, $AO = 7{,}5$ см. В ΔBCO, по теореме Пифагора: $BO^2 = BC^2 + CO^2$, $BO^2 = 4 + 2{,}25$. $BO = 2{,}5$ см.

5. $AB = AO + OB$, $AB = 7{,}5 + 2{,}5 = 10$ (см).

(*Ответ*: 10 см.)

Задачу у доски решает один ученик. Остальные учащиеся записывают решение в тетрадь, исправляя и дополняя отвечающего (по необходимости).

Задача 2

Прямые AB и CD перпендикулярны некоторой плоскости и пересекают ее в точках B и D соответственно. Найдите AC, если $AB = 9$, $CD = 15$, $BD = 8$.

(Следует сообщить учащимся, что в задаче возможны два варианта расположения точек A, C и плоскости.)

а) точки A и C лежат по одну сторону от плоскости (у доски работает один ученик, выполняет полное решение со всеми необходимыми обоснованиями);

б) точки A и C лежат по разные стороны от плоскости (у доски работает один ученик, самостоятельно выполняя решение. Можно составить только план решения).

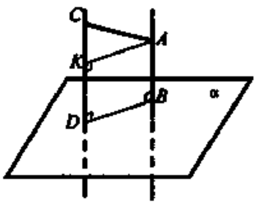


Рис. 9

а) *Дано:* α; $AB \perp \alpha$, $AB \cap \alpha = B$; $CD \perp \alpha$, $CD \cap \alpha = D$; $AB = 9$, $CD = 15$, $BD = 8$ (рис. 9).

Найти: AC.

Решение:

1. $\left.\begin{array}{l} AB \cap \alpha = B, \text{ то } B \in \alpha \\ CD \cap \alpha = D, \text{ то } D \in \alpha \end{array}\right| \Rightarrow BD \subset \alpha;$

2. Так как $AB \perp \alpha$, $CD \perp \alpha$, а $BD \subset \alpha$, то $AB \perp BD$ и $CD \perp BD$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости).

3. Так как $AB \perp \alpha$ и $CD \perp \alpha$, то $AB \parallel CD$ (по теореме, обратной к теореме о связи между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости) и существует плоскость β: $AB \subset \beta$ и $CD \subset \beta$. Тогда $ABCD$ – трапеция, прямоугольная. Пусть AK – высота трапеции, тогда $AK \perp KD$. $ABDK$ – прямоугольник (по признаку – углы прямые); $AB = KD = 9$, $BD = AK = 8$ (по свойству сторон прямоугольника).

4. ΔAKC – прямоугольный: $KC = CD - KD$, $KC = 15 - 9 = 6$. По теореме Пифагора: $AC^2 = AK^2 + CK^2$, $AC^2 = 8^2 + 6^2 = 100$; $AC = 10$.

(*Ответ*: 10.)

б) Рис. 9*а*

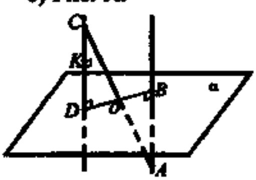


Рис. 9а

Решение:

1–2 аналогично случаю *а*.

3. $\Delta AOB \sim \Delta COD \Rightarrow \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{BO}{DO} = \dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{5}$.

Так как $BO + OD = 8$, то $BO = 3$, $DO = 5$.

4. ΔAOB: $AO^2 = AB^2 + OB^2$, $OA = 3\sqrt{10}$.

ΔCOD: $CO^2 = CD^2 + OD^2$, $CO = 5\sqrt{10}$.

5. $AC = AO + CO$, $AC = 8\sqrt{10}$.

(*Ответ*: $8\sqrt{10}$.)

Задача № 3

Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ перпендикулярна плоскости α. Найдите периметр параллелограмма, если $AB = 7$ см, точки A и C лежат в плоскости α.

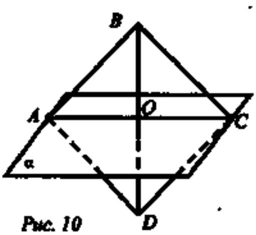


Рис. 10

Дано: α; $ABCD$ – параллелограмм; $BD \perp \alpha$; $A \in \alpha$, $C \in \alpha$; $AB = 7$ см (рис. 10).

Найти: $P\,(ABCD)$.

Решение:

1) Так как $A \in \alpha$, $C \in \alpha$, то $\left.\begin{matrix} AC \subset \alpha \\ BD \perp \alpha \end{matrix}\right| \Rightarrow BD \perp AC$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости). Значит, $ABCD$ – ромб (по признаку). Тогда $AB = BC = CD = AD = 7$ см (по определению ромба).
2) $P_{ABCD} = 4 \cdot 7 = 28$ (см).

(*Ответ*: 28 см.)

V. Подведение итогов

Домашнее задание

1) Повторить теоретический материал по изученной теме.
2) Решить задачи № 131, дополнительные задачи:

1. Отрезок MH пересекает некоторую плоскость в точке K. Через концы отрезка проведены прямые HP и ME, перпендикулярные плоскости и пересекающие ее в точках P и E. Найдите PE, если $HP = 4$ см, $HK = 5$ см, $ME = 12$ см.
2. Треугольник ABC правильный, точка O – его центр. Прямая OM перпендикулярна плоскости ABC. Докажите, что $MA = MB = MC$. Найдите MA, если $AB = 6$ см, $MO = 2$ см.
3. $ABCD$ прямоугольник. Отрезок AE перпендикулярен к плоскости ABC. $EB = 15$, $EC = 24$, $ED = 20$. Докажите, что треугольник EDC прямоугольный, и найдите AE.
4. Точка A принадлежит окружности, AK – перпендикуляр к ее плоскости, $AK = 1$ см, AB – диаметр, BC – хорда окружности, составляющая с AB угол 45°. Радиус окружности равен 2 см. Докажите, что треугольник KCB прямоугольный, и найдите KC.

I уровень – № 131, дополнительные задачи № 1, 2.

II уровень – № 131, дополнительные задачи № 3, 4.

Решение задач домашнего задания.

Задача № 131

Дано: $ABCD$ – тетраэдр; $M \in BC : BM = MC$; $AB = AC$, $DB = DC$ (рис. 11).

Доказать: $(ADM) \perp DC$.

Доказательство:

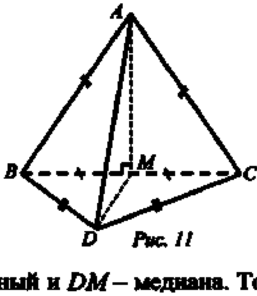


Рис. 11

1. Так как $AB = AC$, то ΔABC – равнобедренный (по определению) и AM – медиана. Тогда AM – высота ΔABC (по свойству медианы равнобедренного треугольника). Значит, $AM \perp BC$.
2. Так как $DB = DC$, то ΔBCD – равнобедренный и DM – медиана. Тогда DM – высота, а значит, $DM \perp BC$.
3. $\left.\begin{matrix} BC \perp AM, AM \subset (ADM) \\ BC \perp DM, DM \subset (ADM) \\ AM \cap DM = M \end{matrix}\right| \Rightarrow BC \perp (ADM)$ или $(ADM) \perp BC$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

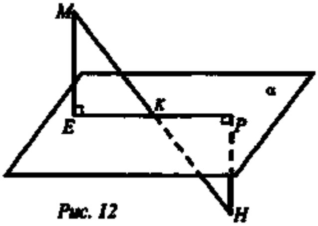


Рис. 12

Задача № 1

Дано: α, MH – отрезок, $MH \cap \alpha = K$; $HP \perp \alpha$, $HP \cap \alpha = P$; $ME \perp \alpha$, $ME \cap \alpha = E$; $HP = 4$ см, $HK = 5$ см, $ME = 12$ см (рис. 12).

Найдите: PE.

Решение:

1) $\left.\begin{array}{l} HP \cap \alpha, \text{ то } P \in \alpha \\ HP \cap \alpha, \text{ то } P \in \alpha \end{array}\right| \Rightarrow PE \subset \alpha.$

2) $ME \perp \alpha$, $HP \perp \alpha$, $PE \subset \alpha \Rightarrow ME \perp PE$ и $HP \perp PE$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости) и $ME \parallel HP$ (по теореме, обратной к теореме, о связи между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости), тогда существует плоскость β: $ME \subset \beta$.
3) Так как $ME \perp PE$ и $HP \perp PE$, то $\angle MEK = \angle HPK = 90°$, а ΔMEK и ΔHPK – прямоугольные.
4) ΔHPK; $HK^2 = HP^2 + KP^2$ (по теореме Пифагора). $KP^2 = HK^2 - HP^2$, $KP = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (см).
5) $\angle EMK = \angle PHK$ (по свойству накрест лежащих углов, образованных параллельными прямыми ME и HP и секущей MH). Тогда $\Delta MEK \sim \Delta HPK$ и $\dfrac{ME}{HP} = \dfrac{EK}{PK}$ (по определению подобных треугольников); $\dfrac{12}{4} = \dfrac{EK}{3} \Rightarrow EK = \dfrac{12 \cdot 3}{4} = 9$ (см).
6) $PE = PK + KE$, $PE = 3 + 9 = 12$ (см).

(*Ответ*: 12 см.)

Задача № 2

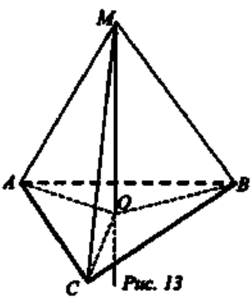


Рис. 13

Дано: ΔABC, $AB = BC = AC$; O – центр ΔABC; $OM \perp (ABC)$; $AB = 6$ см, $MO = 2$ см (рис. 13).

Доказать: $MA = MB = MC$.

Найти: MA.

Решение:

1) Так как O – центр ΔABC, то $AO = BO = CO = R$.
2) Так как $MO \perp (ABC)$, то $MO \perp AO$, $MO \perp BO$, $MO \perp CO$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости). Тогда $\angle MOA = \angle MOB = \angle MOC = 90°$, а ΔMAO, ΔMBO и ΔMCO – прямоугольные.
3) $\Delta MAO = \Delta MBO = \Delta MCO$ (по двум катетам): MO – общий, $AO = BO = CO$. Следовательно, $MA = MB = MC$.
4) ΔMAO: $AO = R = \dfrac{AB\sqrt{3}}{3} = \dfrac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ (см). По теореме Пифагора: $AM^2 = AO^2 + MO^2$, $AM^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2^2$; $AM = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4$ (см).

(*Ответ*: 4 см.)

Задача № 3

Дано: $ABCD$ – прямоугольник; $AE \perp (ABC)$; $EB = 15$, $EC = 24$, $ED = 20$ (рис. 14).

Доказать: ΔEDC – прямоугольный.

Найти: AE.

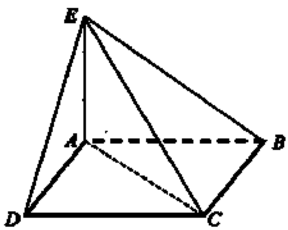


Рис. 14

Решение:

1) Так как $AE \perp (ABC)$, то $AE \perp AD$ ($AD \subset (FDC)$), $AE \perp AB$ ($AB \subset (ABC)$), $AE \perp AC$ ($AC \subset (ABC)$) (по определению прямой, перпендикулярной плоскости). Значит, $\angle DAE = \angle CAE = \angle BAE = 90°$, а ΔDAE, ΔCAE и ΔBAE – прямоугольные.
2) ΔDAC – прямоугольный, $\angle D = 90°$, так как $ABCD$ – прямоугольник. По теореме Пифагора: $AC^2 = AD^2 + DC^2 = AD^2 + AB^2$ ($DC = AB$ – по свойству сторон прямоугольника).
3) По теореме Пифагора в ΔDAE: $DE^2 = AD^2 + AE^2$, $AD^2 = DE^2 - AE^2$ (1); в ΔCAE: $EC^2 = AC^2 + AE^2 = AD^2 + AB^2 + AE^2$ (2); в ΔBAE : $EB^2 = AB^2 + AE^2$, $AB^2 = EB^2 - AE^2$ (3); подставим (1) и (3) в (2), получим: $EC^2 = DE^2 - AE^2 + EB^2$; $AE^2 = DE^2 + EB^2 - EC^2$, $AE^2 = 20^2 + 15^2 - 24^2 = 400 + 225 - 576 = 49$; $AE = \sqrt{49} = 7$.
4) $$\left.\begin{array}{l} AB \perp AE, AE \subset (DAE) \\ AD \perp AD, AD \subset (DAE) \\ AE \cap AD = A \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} AB \perp (DAE) \\ AB \parallel BC \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} DC \perp (DAE) \Rightarrow DC \perp DE \\ DE \subset (DAE) \end{array}$$

Значит, $\angle CDE = 90°$ и ΔEDC – прямоугольный.

Урок 30. Решение задач на перпендикулярность прямой и плоскости

Цели урока:

1) совершенствовать навыки решения задач;
2) проверить теоретические знания, умение решать задачи и навыки учащихся по теме «Перпендикулярность прямой и плоскости».

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урок.

II. Актуализация знаний учащихся

1. Разобрать задачи из домашнего задания, с которыми не справились большинство учащихся.
2. Решение задач на готовых чертежах (для учащихся, справившихся с домашним заданием).

Решение проводится с последующей проверкой и обсуждением решения для учащихся всего класса.

Прямая a перпендикулярна плоскости ABC (рис. 1, 2, 3, 4).

1. Рис. 1. $\angle ACB = 90°$, $AC = 4$, $MD = 3$. *Найти*: MC.

2. Рис. 2. ΔABC – равносторонний, $AB = 2\sqrt{3}$, $MD = 4$. *Найти*: MC.

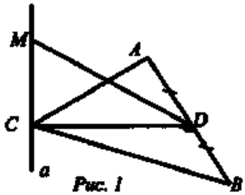


Рис. 1

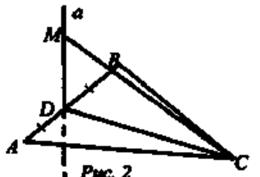


Рис. 2

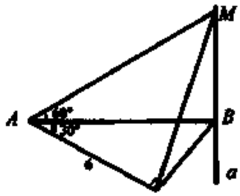


Рис. 3 C

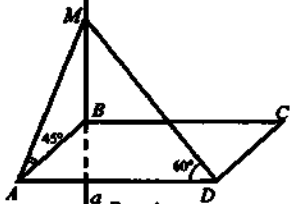


Рис. 4

3. Рис. 3. *Найти*: MB.

4. Рис. 4. $ABCD$ – прямоугольник, $MD = 8$. *Найти*: AB и AD.

Решения к задачам на готовых чертежах

№ 1

Решение:

1) Так как CD – медиана и высота в ΔABC, то ΔABC – равнобедренный (по признаку) $\Rightarrow AC = BC = 4$.
2) ΔABC – прямоугольный ($\angle ACB = 90°$). По теореме Пифагора: $AB2 = AC2 + BC2 = 42 + 42 = 32$, $AB = 4\sqrt{2}$, $CD = \frac{1}{2}AB = 2\sqrt{2}$ (по свойству медианы, проведенной к гипотенузе).
3) Так как $a \perp (ABC)$, то $MC \perp (ABC) \Rightarrow MC \perp CD \Rightarrow \angle MCD = 90°$. ΔMCD – прямоугольный. По теореме Пифагора: $MD^2 = MC^2 + CD^2 \Rightarrow$
$$\Rightarrow MC^2 = MD^2 - CD^2 \quad MC = \sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{9-8} = 1.$$

(*Ответ*: 1.)

№ 2

Решение:

1) Так как CD – медиана равностороннего треугольника, то $CD = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$, $CD = \frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = 3$.
2) Так как $a \perp (ABC)$, то $MD \perp (ABC) \Rightarrow MD \perp DC \Rightarrow \angle MDC = 90°$.
3) ΔMDC – прямоугольный. По теореме Пифагора: $MC2 = MD2 + DC2$, $MC2 = 42 + 32 = 25$, $MC = 5$.

(*Ответ*: 5.)

№ 3

Решение:

1) ΔACB, $\angle C = 90°$. $\cos A = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB = \frac{AC}{\cos 30°} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6\cdot 2}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$.

2) $a \perp (ABC) \Rightarrow MB \perp (ABC) \Rightarrow MB \perp AB \Rightarrow \angle MBA = 90°$. ΔABM – прямоугольный; $tg\angle BAM = \dfrac{MB}{AB} \Rightarrow MB = AB \cdot tg60° = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 12$.

(*Ответ*: 12.)

№ 4

Решение:

1) Так как $a \perp (ABC)$, то $MB \perp (ABC) \Rightarrow \left.\begin{aligned} MB \perp AD, MB \subset (ABM) \\ MB \perp AD, AB \subset (ABM) \\ AB \subset MB = B \end{aligned}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow AD \perp (ABM) \Rightarrow AD \perp AM \Rightarrow \angle MAD = 90°$.

2) ΔMAD – прямоугольный: $\cos\angle ADM = \dfrac{AD}{MD}$, $tg\,\angle ADM = \dfrac{AM}{AD}$.

$AD = MD\cos 60° = 8 \cdot \dfrac{1}{2} = 4$; $AM = AD \cdot tg\,60° = 4\sqrt{3}$.

3) $MB \perp (ABC) \Rightarrow MB \perp AB \Rightarrow \angle ABM = 90°$. ΔABM – прямоугольный:

$\cos\angle MAB = \dfrac{AB}{AM} \Rightarrow AB = AM \cdot \cos 45° = \dfrac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{6}$.

(*Ответ*: $2\sqrt{6}$.)

III. Самостоятельная работа (см. приложение)

Решение задач самостоятельной работы

I уровень

Вариант I

№ 1. *Дано:* α, AB – отрезок, $AB \not\parallel \alpha$; $AA_1 \perp \alpha$, $AA_1 \cap \alpha = A_1$; $BB_1 \perp \alpha$, $BB_1 \cap \alpha = B_1$; $A_1B_1 = 12$ см, $AA_1 = 6$ см, $BB_1 = 11$ см (рис. 5).

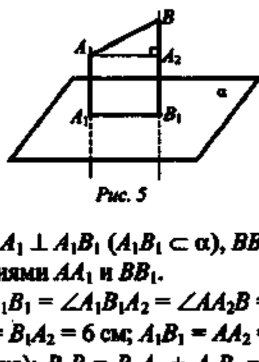


Рис. 5

Найти: AB.

Решение:

1) Так как $AA_1 \perp \alpha$ и $BB_1 \perp \alpha$, то $AA_1 \parallel BB_1$ и существует плоскость β: $AA_1 \subset \beta$, $BB_1 \subset \beta$ и $AA_1 \perp A_1B_1$ ($A_1B_1 \subset \alpha$), $BB_1 \perp A_1B_1$. Тогда ABB_1A_1 – трапеция с основаниями AA_1 и BB_1.

2) Пусть AA_2 – высота ABB_1A_1, $A_2 \in BB_1$. $\angle AA_1B_1 = \angle A_1B_1A_2 = \angle AA_2B = 90°$, тогда $AA_2B_1A_1$ – прямоугольник; $AA_1 = B_1A_2 = 6$ см; $A_1B_1 = AA_2 = 12$ см (по свойству сторон прямоугольника); $B_1B = B_1A_2 + A_2B$, то $A_2B = B_1B - B_1A_2$, $A_2B = 5$(см).

3) Так как AA_2 – высота, то $AA_2 \perp BB_1 \Rightarrow \angle AA_2B = 90°$. ΔAA_2B – прямоугольный, по теореме Пифагора $AB^2 = AA_2^2 + A_2B^2$.

$AB = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$ (см).

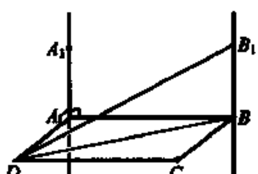


Рис. 6

№ 2. *Дано:* $ABCD$ – прямоугольник; $A_1A \parallel B_1B$, $A_1A \not\subset (ABC)$, $B_1B \not\subset (ABC)$; $A_1A \perp AB$, $A_1A \perp AD$; $B_1D = 25$ см, $AB = 12$ см, $AD = 16$ см (рис. 6).

Найти: B_1B.

Решение:

1) $\left.\begin{array}{r} AA_1 \perp AB,\ AB \subset (ABC) \\ AA_1 \perp AD,\ AD \subset (ABC) \\ AB \cap AD = A \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{r} AA_1 \perp (ABC) \\ AA_1 \parallel BB_1 \end{array}\right| \Rightarrow BB_1 \perp (ABC) \Rightarrow BB_1 \perp BD.$

2) ΔABD, $\angle A = 90°$. По теореме Пифагора: $BD2 = AB2 + AD2$. $BD = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20$ (см).

3) Так как $BD \perp BB_1$, то $\angle B_1BD = 90°$. ΔB_1BD – прямоугольный. По теореме Пифагора: $B_1D^2 = B_1B^2 + BD^2$; $B_1B^2 = B_1D^2 - BD^2$, $B_1B = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$ (см).

(*Ответ*: 15 см.)

Вариант II

№ 1. Дано: α, AB – отрезок, $AB \cap \alpha$; $AA_1 \perp \alpha$, $AA_1 \cap \alpha = A_1$; $BB_1 \perp \alpha$, $BB_1 \cap \alpha = B_1$; $AB = 13$ см, $AA_1 = 3$ см, $BB_1 = 8$ см.

Найти: A_1B_1.

Решение:

1)–2) см. решение задачи № 1 (I вариант); $AA_1 = B_1B_2 = 3$ см; $A_1B_1 = AA_2$; $B_1B = B_1A_2 + A_2B$, то $A_2B = B_1B - B_1A_2$, $A_2B = 5$ см.

3) $\angle AA_2B = 90°$, ΔAA_2B – прямоугольный. По теореме Пифагора: $AB^2 = AA_2^2 + A_2B^2 \Rightarrow AA_2^2 = AB^2 - A_2B^2$, $AA_2 = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см). Значит, $A_1B = 12$ см.

(*Ответ*: 12 см.)

№ 2. Дано: $ABCD$ – ромб; $A_1A \parallel B_1B$, $A_1A \not\subset (ABC)$, $B_1B \not\subset (ABC)$; $B_1B \perp AB$, $B_1B \perp BC$; $A_1C = 13$ см, $BD = 16$ см, $AB = 10$ см (рис. 7).

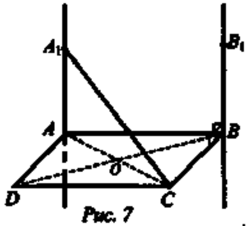


Рис. 7

Найти: AA_1.

Решение:

1) $\left.\begin{array}{r} BB_1 \perp AB,\ AB \subset (ABC) \\ BB_1 \perp BC,\ BC \subset (ABC) \\ AB \cap BC = B \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{r} BB_1 \perp (ABC) \\ BB_1 \parallel AA_1 \end{array}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow AA_1 \perp (ABC) \Rightarrow AA_1 \perp AC.$

2) $AC \perp BD$ и $AO = OC$, $BO = OD$ (по свойству диагоналей ромба). В ΔAOB: $\angle AOB = 90°$, $BO = \frac{1}{2}BD = 8$ см. По теореме Пифагора: $AB^2 = AO^2 + BO^2 \Rightarrow AO^2 = AB^2 - BO^2$, $AO = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ (см). $AO = \frac{1}{2}AC \Rightarrow AC = 12$ см.

3) $AA_1 \perp AC \Rightarrow \angle A_1AC = 90°$. ΔA_1AC – прямоугольный, по теореме Пифагора $A_1C^2 = AA_1^2 + AC^2$. $AA_1^2 = A_1C^2 - AC^2$. $AA_1 = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ (см).

(*Ответ*: 5 см.)

II уровень

Вариант I

№ 1. *Дано:* α, AB, $AB \cap \alpha = O$; $AA_1 \perp \alpha$, $AA_1 \cap \alpha = A_1$; $BB_1 \perp \alpha$, $BB_1 \cap \alpha = B_1$; $A_1A = 4$ см, $\angle A_1AO = 60°$, $A_1O : OB_1 = 1 : 2$ (рис. 8).

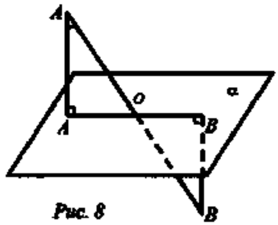


Рис. 8

Найти: AB.

Решение:

1) $\left.\begin{array}{l} AA_1 \cap \alpha = A_1, A_1 \in \alpha \\ BB_1 \cap \alpha = B_1, B_1 \in \alpha \end{array}\right| \Rightarrow A_1B_1 \subset \alpha$

2) Так как $AA_1 \perp \alpha$ и $BB_1 \perp \alpha$, $A_1B_1 \subset \alpha$, то $AA_1 \perp A_1B_1$, $BB_1 \perp A_1B_1$ и $AA_1 \parallel BB_1$. Тогда существует плоскость $\beta : AA_1 \subset \beta$ и $BB_1 \subset \beta$.

3) ΔAA_1O и ΔBB_1O – прямоугольные, $\angle AA_1O = \angle BB_1O = 90°$. $\angle A = \angle B$ (по свойству накрест лежащих углов, образованных параллельными прямыми AA_1 и BB_1 и секущей AB.) $\Delta AA_1O \sim \Delta BB_1O$ (по равенству острых углов) $\Rightarrow \dfrac{AO}{BO} = \dfrac{A_1O}{B_1O} = \dfrac{A_1A}{B_1B} = \dfrac{1}{2}$ (по определению подобных треугольников); $\dfrac{4}{B_1B} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow BB_1 = 8$ (см).

4) В ΔAA_1O, $\angle AA_1O = 90°$: $\cos\angle A = \dfrac{AA_1}{AO} \Rightarrow AO = \dfrac{AA_1}{\cos 60°} = \dfrac{4}{1/2} = 8$ (см), так как $\dfrac{AO}{BO} = \dfrac{1}{2}$, то $BO = 2 \cdot AO = 2 \cdot 8 = 16$ (см). Тогда $AB = AO + BO = 24$ (см).

(*Ответ*: 24 см.)

№ 2. *Дано:* $ABCD$ – прямоугольник; KA – прямая $KA \perp (ABC)$ (рис. 9).

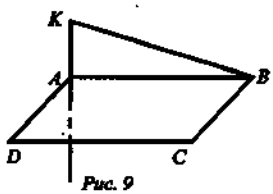


Рис. 9

Доказать: $KB \perp BC$.

Доказательство:

1) $\left.\begin{array}{l} KA \perp (ABC) \\ BC \subset (ABC) \end{array}\right| \Rightarrow KA \perp BC$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости).

2) Так как $ABCD$ – прямоугольник, то $\angle ABC = 90° \Rightarrow AB \perp BC$.

3) $\left.\begin{array}{l} BC \perp KA, KA \subset (ABK) \\ BC \perp AB, AB \subset (ABK) \\ KA \cap AB = A \end{array}\right| \Rightarrow BC \perp (ABK)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

4) $\left.\begin{array}{l} BC \perp (ABK) \\ KB \subset (ABK) \end{array}\right| \Rightarrow BC \perp KB$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости).

Вариант II

№ 1. *Дано:* α, AB – отрезок, $AB \cap \alpha = O$; $AA_1 \perp \alpha$, $AA_1 \cap \alpha = A_1$; $BB_1 \perp \alpha$, $BB_1 \cap \alpha = B_1$; $B_1B = 3\sqrt{2}$ см, $\angle OBB_1 = 45°$, $A_1A : B_1B = 1 : 3$ (рис. 8).

Найти: AB.

Решение:

1)–3) см. решение задачи № 1 (вариант I); $\Delta AA_1O \quad \Delta BB_1O \Rightarrow \frac{AO}{BO} =$

$= \frac{A_1O}{B_1O} = \frac{A_1A}{B_1B} = \frac{1}{3}$; $\frac{A_1A}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow A_1A = \sqrt{2}$ (см). Так как $\angle A = \angle B = 45$, то ΔAA_1O и ΔBB_1O – равнобедренные прямоугольные треугольники $\Rightarrow A_1O = AA_1 = \sqrt{2}$ см, $B_1O = B_1B = 3\sqrt{2}$ см.

4) В $AA_1O : AO = AA_1\sqrt{2} = 2$ (см). В $\Delta BB_1O : BO = BB_1\sqrt{2} = 6$ (см); $AB = AO + BO = 8$ (см).

(*Ответ*: 8 см.)

№ 2. *Дано:* $ABCD$ – квадрат; MB – прямая; $MB \perp (ABC)$ (рис. 10).

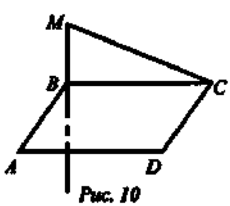


Рис. 10

Доказать: $MC \perp CD$.

Доказательство:

1) $\left.\begin{matrix} MB \perp (ABC) \\ CD \subset (ABC) \end{matrix}\right| \Rightarrow MB \perp CD.$

2) Так как $ABCD$ – квадрат, то $\angle BCD = 90° \Rightarrow \Rightarrow BC \perp CD$.

3)

$$\left.\begin{matrix} CD \perp MB, MB \subset (BCM) \\ CD \perp BC, BC \subset (BCM) \\ MB \cap BC = B \end{matrix}\right| \Rightarrow \left.\begin{matrix} CD \perp (BCM) \\ MC \subset (BCM) \end{matrix}\right| \Rightarrow CD \perp MC.$$

$CD \perp MB$, $MB \subset (BCM)$. $CD \perp BC$, $BC \subset (BCM)$.

III уровень

Вариант I

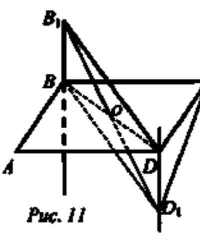


Рис. 11

№ 1. *Дано:* $ABCD$ – прямоугольник; $B_1B \perp (ABC)$, $D_1D \perp (ABC)$; $B_1D_1 \cap (ABC)$; $BB_1 = DD_1 = 12$ см, $AB = 6$ см, $BC = 8$ см (рис. 11).

Доказать: $(ABB_1) \parallel (CDD_1)$.

Найти: B_1D_1.

Решение:

1) $BB_1 \perp (ABC)$ и $DD_1 \perp (ABC) \Rightarrow BB_1 \parallel DD_1$ (по теореме, устанавливающей связь между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости); $AB \parallel CD$ (по свойству сторон прямоугольника); $B_1B \cap AB = B$, $B_1B \subset (ABB_1)$, $AB \subset (ABB_1)$; $D_1D \cap CD = D$, $D_1D \subset (CDD_1)$, $CD \subset (CDD_1)$. Следовательно, $(ABB_1) \parallel (CDD_1)$ (по признаку).

2) $\left.\begin{matrix} B_1B \parallel D_1D \\ B_1B = D_1D = 12\text{ см} \end{matrix}\right| \Rightarrow BB_1DD_1$ – параллелограмм (по признаку)

$\left.\begin{matrix} BD \cap B_1D_1 = O : BO = OD \\ B_1O = D_1O \end{matrix}\right| \Rightarrow$ (по свойству диагоналей параллелограмма).

3) ΔBAD, $\angle A = 90°$. По теореме Пифагора: $BD2 = AB2 + AD2$ ($AD = BC$);

$$BD=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{100}=10\text{ (см)} \Rightarrow OD=\frac{1}{2}BD=5\text{ см.}$$

4) $\left.\begin{matrix} DD_1 \perp (ABC) \\ BD \supset (ABC) \end{matrix}\right| \Rightarrow DD_1 \perp BD \Rightarrow \angle D_1DB = 90°.$

5) ΔD_1DO – прямоугольный, по теореме Пифагора: $D_1O2 = D_1D2 + DO2$. $D_1O=\sqrt{169}=13$ (см) $\Rightarrow B_1D_1 = 2 \cdot D_1O = 26$ (см).

(*Ответ*: 26 см.)

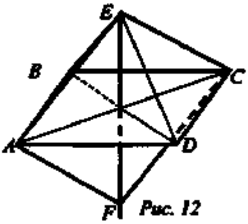


Рис. 12

№ 2. *Дано:* $ABCD$ и $AECF$ – квадраты; $BD \perp EF$ (рис. 12).

Доказать: $EF \perp (ABC)$.

Найти: $\angle(AC; ED)$.

Решение:

1) $AC \perp EF$ (по свойству диагоналей квадрата); $BD \perp EF$ (по условию). $AC \subset (ABC)$ и $BD \subset (ABC)$, $AC \cap BD \Rightarrow EF \perp (ABC)$ по признаку.

2) $\left.\begin{matrix} AC \perp BD, BD \subset (BED) \\ EF \perp (ABC) \Rightarrow EF \perp AC, EF \subset (BED) \\ BD \cap EF \end{matrix}\right| \Rightarrow AC \perp (BED) \Rightarrow AC \perp ED.$

Значит, $\angle(AC, ED) = 90°$.

(*Ответ*: 90°.)

Вариант II

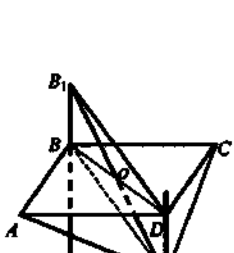


Рис. 13

№ 1. *Дано:* $ABCD$ – прямоугольник; $B_1B \perp (ABC)$, $D_1D \perp (ABC)$; $B_1D \cap (ABC)$; $BB_1 = DD_1 = 12$ см; $B_1D_1 = 26$ см, $AB : BC = 3 : 4$ (рис. 13).

Найти: S_{ABCD}.

Доказать: $(CBB_1) \parallel (DAA_1)$.

Решение:

1) $BB_1 \perp (ABC), DD_1 \perp (ABC) \Rightarrow BB_1 \parallel DD_1$; $AB \parallel BC$; $B_1B \cap BC = B$, $B_1B \subset (CBB_1)$ и $BC \subset (CBB_1)$;
$D_1D \cap AD = D, DD_1 \subset (DAA_1)$ и $AD \subset (DAA_1) \Rightarrow (CBB_1) \parallel (DAA_1)$ (по признаку).

2) $B_1B \parallel D_1D$ и $B_1B = D_1D = 12$ см $\Rightarrow BBDD_1$ – параллелограмм, $BD \cap B_1D_1 = O : B_1O = D_1O = \frac{1}{2}B_1D_1 = 13$ см, $BO = OD$.

3) $B_1B \perp (ABC) \Rightarrow B_1B \perp BD \Rightarrow \angle B_1BD = 90°$; ΔB_1BO – прямоугольный, по теореме Пифагора: $B_1O^2=B_1B^2+BO^2 \Rightarrow BO=\sqrt{B_1O^2-B_1B^2} = \sqrt{13^2-12^2}=5$ (см) $\Rightarrow BD = 10$ (см).

4) ΔABD, $\angle A = 90°$. $\frac{AB}{BC}=\frac{3}{4} \Rightarrow AB=\frac{3}{4}BC$. По теореме Пифагора:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = AB^2 + BC2\ (AD = BC);\ BD^2 = (\frac{3}{4}BC)^2 + BC^2;$$

$$BD^2 = \frac{25}{16}BC^2,\ BC = \sqrt{\frac{16}{25}BD^2} = \frac{4}{5}\cdot 10 = 8\ (\text{см});\ AB = \frac{3}{4}\cdot 8 = 6\ (\text{см}).$$

5) $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 6 \cdot 8 = 48$ (см²).

(*Ответ*: 48 см².)

№ 2. Дано: $ABCD$ и $ABEF$ – квадраты; $AD \perp AF$ (рис. 14).

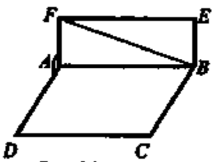


Рис. 14

Доказать: $BC \perp (AEF)$.

Найти: $\angle(AD; BF)$.

Решение:

1. $\angle DAB = 90° \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} DA \perp AB, AB \subset (AEF) \\ \Rightarrow DA \perp AF, AF \subset (AEF) \\ AB \cap AF = A \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} DA \perp (AEF) \\ DA \parallel BC \end{array}\right| \Rightarrow$$

$BC \perp (AEF)$ (по теореме, обратной к теореме, устанавливающей зависимость между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости).

2) Так как $DA \perp (AEF)$, а $BF \subset (AEF)$, то $DA \perp BF$ (по определению прямой перпендикулярной плоскости). Значит, $\angle(AD, BF) = 90°$.

IV. Проведение итогов

Домашнее задание

Решить задачи

I уровень – задачи II уровня (или III уровня, по усмотрению учителя) самостоятельной работы;

II уровень – задачи III уровня (или другой вариант) самостоятельной работы.

§ 2. ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

(уроки 25–30)

Урок 31. Расстояние от точки до плоскости. Теорема о трех перпендикулярах

Цели урока:

1) ввести понятие расстояния от точки до плоскости;
2) доказать теорему о трех перпендикулярах. Показать применение этой теоремы при решении задач.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация опорных знаний

1. Теоретический опрос (фронтальная работа с классом).
   - 1.1. Угол между прямыми равен 90°. Как называются такие прямые? (Перпендикулярные.)
   - 1.2. Верно ли утверждение: «Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна некоторой прямой, лежащей в этой плоскости?» (Да.)
   - 1.3. Продолжите предложение: «Прямая перпендикулярна плоскости, если она...» (перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости).
   - 1.4. Что можно сказать о двух (3-х, 4-х) прямых, перпендикулярных к одной плоскости? (Они параллельны.)
   - 1.5. Две прямые, перпендикулярные третьей прямой, ... (параллельны.)
   - 1.6. Как определяется расстояние от точки до прямой на плоскости?
     Возможный ответ: как кратчайшее расстояние от точки до прямой, как длина перпендикуляра, проведенного из точки к данной прямой. Верно.
   - 1.7. (Рис. 1).
     Вспомним, как называются отрезки *AM* – ? *AH* – ? Точка *M*? Точка – *H*?
   - 1.8. А как же определить расстояние от точки до плоскости?

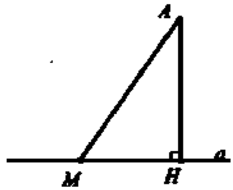


Рис. 1

III. Изучение нового материала

1. Вводится понятие перпендикуляра к плоскости, наклонной, проекции наклонной на плоскость.

Рассмотрим плоскость α и точку $A \notin \alpha$ (рис. 2).

Учитель вычерчивает рис. 51 учебника на доске, учащиеся в тетрадях.

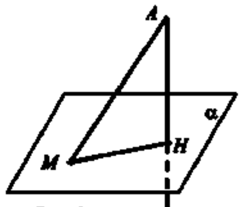


Рис. 2

1) Точку *A*, прямую $a \perp \alpha$, $a \cap \alpha = H$, *AH* – перпендикуляр, *H* – основание перпендикуляра;
2) Отметим в плоскости α произвольную точку *M*, отличную от *H*. *AM* – наклонная, проведенная из *A* к плоскости α, *HM* – проекция на плоскость α.
3) Докажите, что $AH < AM$; – чему равен $\angle MHA$? $\angle MHA = 90°$, $\Rightarrow$ – ΔAHM прямоугольный, *AH* – катет, *AM* – гипотенуза, поэтому $AH < AM$.

Вывод. Перпендикуляр, проведенный из данной точки к плоскости, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к этой плоскости.

4) Рассмотрите рис. 52, стр. 41 учебника, 2 абзац сверху прочитать.

2. Вводится понятие расстояния от точки *A* до плоскости, расстояние между параллельными плоскостями, расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью, расстояние между скрещивающимися прямыми.

Что называется расстоянием от точки *A* до плоскости α?

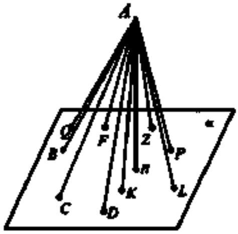


Рис. 3

Расстоянием от точки A до плоскости α называется длина перпендикуляра, проведенного из точки A к плоскости α (рис. 3).

– Назовите наклонные по рис. 3.

– Назовите перпендикуляр.

Вычертить чертежи 4–7 в тетрадях. Учитель рассказывает по чертежам (или по готовой таблице).

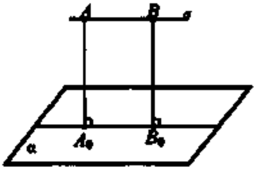


Рис. 4

Если $\alpha \parallel \beta$, то все точки плоскости α равноудалены от другой плоскости. Пусть $A \in \alpha$, $M \in \alpha$, проведем $AA_0 \perp \beta$, $MM_0 \perp \beta$, тогда $AA_0 \parallel MM_0 \Rightarrow$ $\Rightarrow AA_0 = MM_0$.

Расстоянием между параллельными плоскостями называется расстояние от произвольной точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости.

Если $a \parallel \alpha$, то все точки прямой равноудалены от этой плоскости (рис. 4).

Задача 144 (стр. 45 – дома)

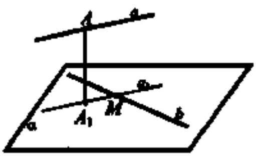


Рис. 5

Расстоянием между прямой и плоскостью называется расстояние от произвольной точки прямой до плоскости.

Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется расстояние между одной из из них и плоскостью (рис. 5), проходящей через другую прямую, параллельно первой прямой. Если a и b скрещиваются, пусть $M \in b$. Проведем $a_1 \parallel a$. Через $a_1 \cap b \Rightarrow \alpha$, $\alpha \parallel a$.

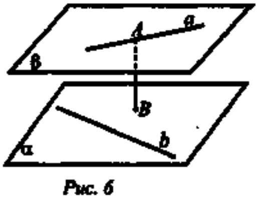


Рис. 6

Из произвольной $A \in a$, $AA_1 \perp \alpha$.

Записываем в тетрадях и на доске вывод (рис. 6): $\alpha \parallel \beta$, $a \parallel \beta$, a и b – скрещивающиеся. $AB \perp \alpha$, $A \in a$, $\beta \in \alpha$.

Длина отрезка AB – расстояние между:

1) плоскостями α и β;

2) прямой a и плоскостью α;

3) прямыми a и b.

3. Докажем теорему о трех перпендикулярах.

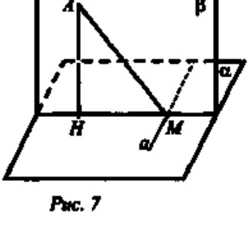


Рис. 7

Теорема:

Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.

Вопрос: Что же дано в этой теореме?

Дано: $AH \perp \alpha$, AM – наклонная к плоскости α (рис. 7).

HM – проекция наклонной, $a \in \alpha$, $a \perp HM$.

Доказать: $a \perp AM$.

Доказательство: $AH \perp a$, так как $AH \perp \alpha \Rightarrow \Rightarrow a \perp \beta$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, $\Rightarrow a \perp AM$ по определению перпендикулярности прямой и плоскости.

Вопрос: О каких же трех перпендикулярах идет речь в теореме?

Три перпендикуляра: *a*, *HM*, *AM*.

Обратная теорема:

Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции.

Дано: $AH \perp \alpha$, *AM* – наклонная к плоскости α, *HM* проекция наклонной, $a \in \alpha$, $a \perp AM$.

Доказать: $a \perp HM$.

Доказательство: задача 153, стр. 45, дома разобрать самостоятельно.

$A \in \alpha$, $a \perp AH$, $a \perp AM \Rightarrow a \perp \beta$, поэтому $a \perp HM$.

IV. Применение знаний в стандартной ситуации

Задача № 139

Из некоторой точки проведены две наклонные.

Докажите, что: а) если наклонные равны, то равны и их проекции; б) если проекции наклонных равны, то равны наклонные; в) если наклонные не равны, то большая наклонная имеет большую проекцию.

Выполним чертеж, решим задачу устно.

Дано: $AH \perp \alpha$, *AB* и *AC* наклонные; а) $AB = AC$; б) $BH = HC$; в) $AB_1 > AC$ (рис. 8).

Доказать: а) $BH = HC$; б) $AB = AC$; в) $B_1H > CH$;

Доказательство:

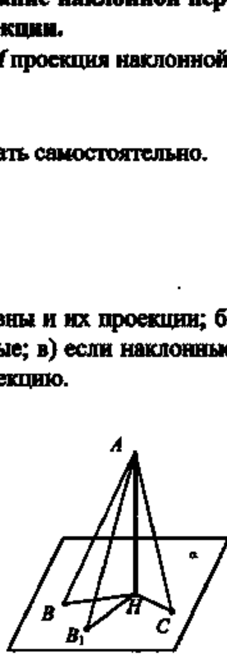


Рис. 8

Рассмотрим ΔABH и *ACH*: *AH* – общий катет;

а) $AB = AC$ гипотенузы $\Rightarrow \Delta ABH = \Delta ACH$ по гипотенузе и катету, значит, $BH = HC$;

б) аналогично $\Delta ABH = \Delta ACH$ по двум катетам (I пр.) $\Rightarrow AB = AC$;

в) из неравенства треугольника.

1) ΔAHB_1: $AB_1 < AH + B_1H$; ΔAHC: $AC < AH + HC$.

2) $HC > AC - AH$; $B_1H > A_1B - AH$.

3) $AB_1 - AC > 0$, так как $AB_1 > AC_1$; $A_1B - AH > AC - AH \Rightarrow A_1B > AC$.

Задача 145

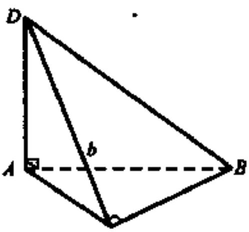


Рис. 9

Через вершину *A* прямоугольного треугольника *ABC* с прямым углом *C* проведена прямая *AD*, перпендикулярная к плоскости треугольника.

а) Докажите, что ΔCBD прямоугольный.

б) Найдите *BD*, если $BC = a$, $DC = b$.

Дано: ΔABC, $\angle C = 90°$, $AD \perp$ плоскости; ΔABC, $BC = a$, $DC = b$ (рис. 9).

а) *Доказать,* что ΔCBD – прямоугольный.

б) *Найти:* BD.

Решение:

а) AC проекция наклонной DC на плоскости ΔABC. $BC \perp AC$ по условию $\Rightarrow BC \perp DC$ по теореме о трех перпендикулярах, значит, ΔCBD – прямоугольный;

б) Из ΔBCD $\angle C = 90°$ по теореме Пифагора. $BD=\sqrt{BC^2+CD^2}$,

$BD=\sqrt{a^2+b^2}$.

(*Ответ*: $\sqrt{a^2+b^2}$.)

V. Подведение итогов

Домашнее задание

Пункты 19, 20, разобрать самостоятельно замечания (второе, № 144), обратная теорема № 153 (144 и 153 решены), решить задачи № 143, 140.

Замечание 2 можно предложить доказать не как в № 144.

II способ

Пусть $a \parallel \alpha$, $A \in a$, $B \in a$ (чертеж, стр. 3, рис. 5.).

Проведем $AA_1 \perp \alpha$, $BB_1 \perp \alpha$. Тогда $AA_1 \parallel BB_1$.

Докажем, что $AA_1 = BB_1$.

Плоскость, проходящая через параллельные прямые AA_1 и BB_1, пересекается с α по прямой A_1B_1 и содержит прямую AB. Ясно, что $AB \parallel A_1B_1$ (если бы $AB \cap A_1B_1$, то $AB \cap \alpha$, что противоречит условию). Итак, $a \parallel \alpha$. $AA_1 \parallel BB_1$ и $AB \parallel A_1B_1 \Rightarrow ABB_1A_1$ – параллелограмм, $\Rightarrow AA_1 = BB_1$.

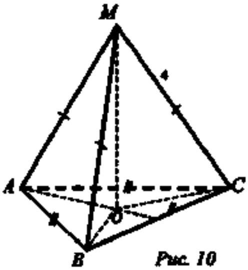


Рис. 10

№ 143

Расстояние от точки M до каждой из вершин правильного ΔABC равно 4 см (рис. 10).

Найдите расстояние от токи M до плоскости ABC, если $AB = 6$ см.

Решение: По условию $MA = MB = MC = 4$ см. Пусть $MO \perp ABC$, тогда $OA = OB = OC$, как проекции равных наклонных. Значит, O – центр окружности, описанной около ΔABC, а OA – радиус этой окружности. $a_3=R\sqrt{3}$, где $AB = a_3$, $R = AO$ поэтому $AO=6:\sqrt{3}=2\sqrt{3}$. Из ΔMAO: $MO=\sqrt{MA^2-AO^2}$; $MO=\sqrt{16-12}=2$.

(*Ответ*: 2 см.)

№ 140

Из точки A, не принадлежащей плоскости α, проведены две наклонные AB и AC равные и перпендикуляр AO. Известно, что $\angle AOB = \angle BAC = 60°$, $AO = 1{,}5$ см. Найдите расстояние между основаниями наклонных.

Дано: $A \notin \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \alpha$, $AB = AC$ наклонные, $AO \perp \alpha$, $O \in \alpha$, $\angle AOB = \angle BAC = 60°$, $AO = 1{,}5$ см (рис. 12).

Найти: BC.

Решение:

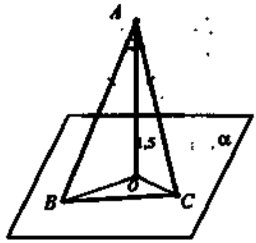


Рис. 12

1) $AO \perp \alpha \Rightarrow AO \perp OB, AO \perp OC$.
2) ΔAOB, $\angle O = 90°$, $\angle AOB = 60°$, $\angle B = 30°$, против $\angle 30°$ лежит катет $AO = \frac{1}{2} \cdot AB$, $AB = 2\,AO = 1{,}5 \cdot 2 = 3$ (см).
3) ΔABC, $\angle BAC = 60°$, $AB = AC$ по условию, $AC = 3$ см. ΔABC равнобедренный $\Rightarrow \angle B = \angle C = (180° - 60°) : 2 = 60° \Rightarrow$ ΔABC – равносторонний. $BC = AB = AC = 3$ см.

(*Ответ*: 3 см.)

Урок 32. Угол между прямой и плоскостью

Цели урока:

1) ввести понятие угла между прямой и плоскостью;
2) рассмотреть задачи, в которых используется это понятие.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся

1. Индивидуальная работа у доски.

Один ученик доказывает обратную теорему о трех перпендикулярах (№ 153).

Второй ученик выполняет краткое решение домашних задач № 140, 143.

2. Пока учащиеся готовятся у доски, учитель ведет фронтальную работу с классом.

Вопросы:

– Сформулируйте теорему о трех перпендикулярах (опросить 3-х учащихся).

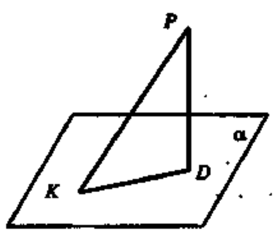


Рис. 1

– По рисунку 1 назовите: перпендикуляр, основание перпендикуляра, наклонную к плоскости α, основание наклонной, проекцию наклонной на плоскость α.
– Сравните PK и PD. ($PK > PD$, так как перпендикуляр PD меньше любой наклонной).
– Что называется расстоянием от точки A до α?
– Что называется расстоянием между параллельными плоскостями?
– Что называется расстоянием между скрещивающимися прямыми?
– Что называется углом между прямыми?
– Что называется углом между скрещивающимися прямыми?

III. Объяснение новой темы

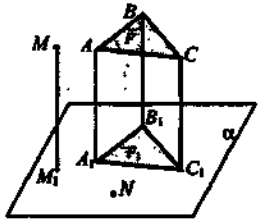


Рис. 2

1. Ввести понятия проекции точки на плоскость, проекции фигуры на плоскость.

Вопрос: Что называется проекцией наклонной на плоскость? (Отрезок, соединяющий основание перпендикуляра и основание наклонной.)

Смотрим на рис. 54 учебника или рис. 2 на доске.

– Что изображено на рис. 2? (Плоскость α и $M \notin \alpha$, $N \in \alpha$).

Запишем в тетрадях:

Определение

Проекцией точки на плоскость называется основание перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости, если точка не лежит в плоскости, и сама точка, если она лежит в плоскости.

– Что же является проекцией M на плоскость α? (M_1.)

– Что же является проекцией N на плоскость α? ($N_1 = N$.)

Отметим вне α еще три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Соединим их попарно.

– Как построить проекцию ΔABC на α?

(Провести из A, B, C перпендикуляры на α, получив точки A_1, B_1, C_1, то есть $\Delta A_1B_1C_1$.)

Обозначим ΔABC фигурой F.

– Как же построить проекцию произвольной фигуры F?

Вывод:

Если построить проекции всех точек какой-нибудь фигуры F на данную плоскость α, то получим фигуру F_1, которая называется (является) проекцией фигуры F на данную плоскость.

2. *Докажем*, что проекцией прямой (a) на плоскость (α), не перпендикулярную к этой прямой, является прямая. Рис. 55, стр. 43 учебника.

На доске рис. 3.

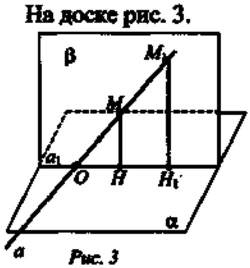


Рис. 3

Учащиеся записывают краткую запись в тетрадях (учитель на доске).

Дано: $a \cap \alpha = O$, $a \not\perp \alpha$.

Доказать: проекцией a на α является a_1.

Доказательство:

1) $M \in a$, $MH \perp \alpha$. Проведем β через a и MH, $\alpha \cap \beta = a_1$.

2) Возьмем $M_1 \in a$, $M_1H_1 \parallel MH$, $M_1H_1 \cap a_1 = H_1$.

3) Так как $MH \parallel M_1H_1$ и $MH \perp a_1 \Rightarrow M_1H_1 \perp \alpha$, то есть H_1 проекция M_1 на α, $\Rightarrow$

Вопрос: Что мы доказали?

Ответ: Что проекция произвольной прямой точки прямой a лежит на прямой a_1.

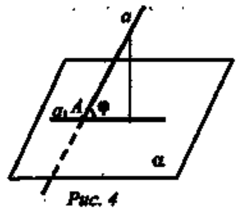


Рис. 4

Верно и то, что любая точка прямой a_1 является проекцией некоторой точки прямой a, $\Rightarrow$ a_1 проекция a на α.

3. Определение угла между прямой и плоскостью (рис. 4).

$0° < \alpha \le 90°$.

Предложить учащимся сформулировать определение.

Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярную к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

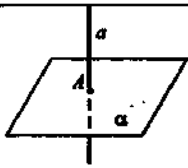
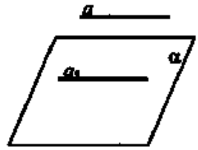
Запишем его кратко в тетрадях (рис. 4 и определение).

Если $a \cap \alpha$, а $\not\perp$ α, a_1 проекция a на α, то $\angle(a, \alpha) = \angle(a, a1) = \varphi$, это величина, а не фигура.

Вопрос: А что если $a \perp \alpha$ или $a \parallel \alpha$?

Ответ оформить в тетрадях в виде таблички, замечания.

Замечания:

1. Если $a \perp \alpha$, то проекция a на α является A. $A = a \cap \alpha$. $\angle(a, \alpha) = 90°$ 	Если $a \parallel \alpha$, то проекция a на α, a_1. $a \parallel a_1$, $a_1 \in \alpha$. $\angle(a, \alpha) = 0°$ Понятие угла не вводим. 

IV. Закрепление изученного материала

1. Решение задачи № 165

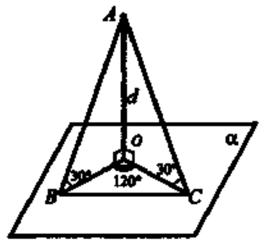


Рис. 5

Дано: γ, $A \notin \gamma$, $AO \perp \gamma$, $O \in \gamma$, $AO = d$, AB и AC наклонные, $\angle ABO = \angle ACO = 30°$, $\angle BOC = 120°$ (рис. 5.)

Найти: BC.

Решение:

1) $\Delta BAO = \Delta CAO$ (по катету и острому углу, противолежащему катету). $OB = OC$. ΔBAO,
$\dfrac{AO}{OB} = tg 30°$, $OB = d \cdot \sqrt{3}$, $OC = d\sqrt{3}$.

2) ΔBOC: по теореме косинусов $CB^2 = OB^2 + OC^2 - 2OB \cdot OC \cdot \cos 120°$, $BC^2 = 9d^2$, $BC = 3d$. (Или ΔBOC – равнобедренный. Проведем $OH \perp BC$, $H \in BC$, $BH = HC$, OH – биссектриса, медиана.
$$BH = \frac{1}{2}BC = OB\cos 30° = d\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3d}{2},\quad BC = 3d\ ).$$

(*Ответ*: $3d$.)

2. Самостоятельно решить при наличии времени. Чертеж с условием на доске.

Дано: ΔABC, $AB = BC = AC$. $AC \in \alpha$, $BD \perp \alpha$, $\angle BAD = 45°$ (рис. 6).

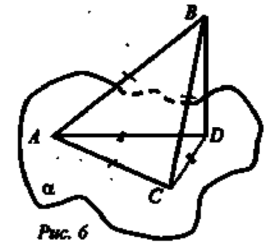


Рис. 6

Найти: $\angle ADC$.

Решение: $\Delta ABD = \Delta CBD$ по гипотенузе и катету. Пусть $AD = a$, $AB = AD : \cos 45° = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$. $AB = BC = AC = a\sqrt{2}$, ΔADC равнобедренный (рис. 7).

$DH \perp AC$, DH – высота, медиана и биссектриса

$\sin ADH = \frac{a\sqrt{2}}{2} : a = \frac{\sqrt{2}}{2}; \Rightarrow \angle ADH = 45°$.

$\angle ADC = 90°$. (*Ответ.* 90°.)

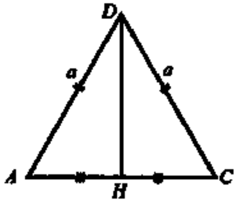


Рис. 7

3. При наличии времени задача 162 учебника (стр. 46, рис. 57) разобрана. Учащимся записать в тетрадь краткую запись решения и сделать вывод с учителем. (Если нет времени, на дом.)

Дано: $M \in \alpha$, MA – наклонная, $A \in \alpha$, $MH \perp a$, $P \in \alpha$, $\angle MAN = \varphi$, $\angle MAH = \varphi_0$.

Доказать: $\varphi_0 < \varphi$.

Доказательство: $MN \perp P$, $MH < MN$. $\frac{MH}{MA} < \frac{MN}{MA}$, $\sin\varphi_0 < \sin\varphi \Rightarrow \varphi_0 < \varphi$.

Пояснение: $\left.\begin{array}{l} \Delta AHM, \angle H = 90°, \sin\varphi_0 = \frac{MN}{AM}, \\ \Delta ANM, \angle N = 90°, \sin\varphi = \frac{MN}{MA}, \end{array}\right|$ AM – общая гипотенуза.

Вывод: Угол между прямой и ее проекцией на плоскость есть наименьший из углов данной прямой и прямыми, лежащими в этой плоскости и проходящими через точку пересечения данной прямой с плоскостью.

V. Подведение итогов

Вопросы: Какие новые понятия мы изучили на уроке? (Проекции точки на плоскость, проекции фигуры на плоскость, угол между прямой и плоскостью.)

Дадим определение этим понятиям (опрос 3-х учащихся). Выставление оценок.

Домашнее задание

П. 21.

Если не успели, № 162, рис. 57, стр. 46.

№ 163, 164.

Напомнить: длины отрезков касательных, проведенных из одной точки до точки касания, равны. Гипотенуза вписанного прямоугольного треугольника является диаметром окружности.

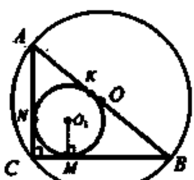


Рис. 8

Решить задачу: Найдите периметр прямоугольного треугольника, если радиус вписанной окружности равен 1, а радиус описанной окружности равен 2,5 (рис. 8).

Решение: ΔABC, $AO = 2{,}5$, $AB = 5$, $NC = CM = OM_1 = 1$. Пусть $AN = x$, $AK = x$, $KB = MB = 5 - x$. По теореме Пифагора: $AC^2 + CB^2 = AB^2$. $(1-x)^2 + (6-x)^2 = 5^2$. $x_1 = 3$, $x_2 = 2$. $AC = 4$, $CB = 3$. $P_{\Delta ABC} = 4 + 3 + 5 = 12$. (*Ответ*: 12.)

№ 163. *Дано:* $A \notin \alpha$, $M \in \alpha$, AM – наклонная, $AM = d$, MH – проекция наклонной; а) $\angle AMH = 45°$, б) $\angle AMH = 60°$, в) $\angle AMH = 30°$ (рис. 9).

Найти: MH.

Решение: $AH \perp \alpha$, MH – проекция наклонной AM. ΔAMH, $\angle H = 90°$, $\cos AMH = \dfrac{MH}{AM}$, $HM = AM \cos AMH$;

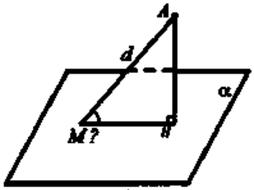


Рис. 9

а) $MH = d\cos 45° = d\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}d}{2}$;

б) $MH = d\cos 60° = d\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{d}{2}$;

в) $MH = d\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}d}{2}$.

(*Ответ*: а) $\dfrac{\sqrt{2}d}{2}$; б) $\dfrac{d}{2}$; в) $\dfrac{\sqrt{3}d}{2}$.)

№ 164

Дано: $A \notin \alpha$, AB – наклонная, $AB \cap \alpha = B$, $B \in \alpha$, $C \in \alpha$, $BC = \dfrac{1}{2}AB$ (рис. 10).

Найти: угол между AB и α.

Решение: $AC \perp \alpha$, ΔABC, $\angle C = 90°$, $\cos ABC = \dfrac{BC}{AB}$; $\cos ABC = \dfrac{1}{2}AB : AB = \dfrac{1}{2}$; $\varphi = \cos ABC = \dfrac{1}{2}$; $\Rightarrow \angle ABC = 60°$. (*Ответ*: 60°.)

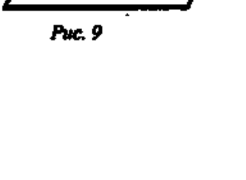


Рис. 10

Урок 33. Повторение теории. Решение задач на применение теоремы о трех перпендикулярах (ТПП), на угол между прямой и плоскостью

Цели урока:
1) повторить доказательство теоремы о трех перпендикулярах, понятия угла между прямой и плоскостью;
2) закрепить навыки решения задач.

Ход урока

I. Проверка домашнего задания

1. 1 человек доказывает ТПП, 1 человек на доске решает одну из домашних задач.
2. Работа с классом устно.

– Что называется перпендикуляром и наклонной?

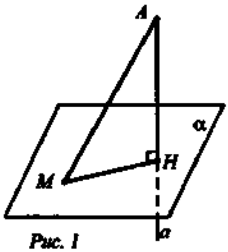


Рис. 1

Проведем через точку A прямую, перпендикулярную α, $a \cap \alpha = H$ (рис. 1).

Отрезок AH называется перпендикуляром, точка H – основание. Возьмем любую точку $M \in \alpha$ и отличную от H. Отрезок AM называется наклонной. Отрезок HM – проекция наклонной.

Длина перпендикуляра всегда меньше длины любой наклонной, проведенной из той же точки к этой плоскости. Длина перпендикуляра, проведенного из точки A к плоскости α, называется расстоянием от точки A до плоскости α.

- Что называется расстоянием между параллельными плоскостями? Привести примеры (расстояние от произвольной точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости).
- Что называется расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью? Привести примеры (расстояние от произвольной точки прямой до плоскости).
- Что называется расстоянием между скрещивающимися прямыми? Привести примеры (расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую, параллельную первой).

II. Решение задач

Задача № 1

В ΔABC $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см.

Через точку B к плоскости треугольника проведен перпендикуляр BD длиной 15 см.

а) *Укажите* проекцию ΔDBC на плоскость ABC.

б) *Найдите* расстояние от точки D до прямой AC.

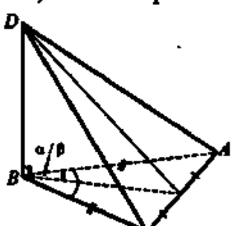


Рис. 2

Дано: ΔABC, $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см, $DB \perp (ABC)$, $DB = 15$ см (рис. 2).

Найти: а) проекцию ΔDBC на (ABC), б) расстояние от точки D до AC.

Решение:

а) 1. Так как $DB \perp (ABC)$ по условию, то проекцией отрезка DB является точка B, проекцией наклонной DC является отрезок BC.

2. Проекцией ΔDBC на (ABC) является отрезок BC.

б) 1. Расстояние от точки D до прямой AC – это длина перпендикуляра.

2. Так как в ΔDBC $\angle B = 90°$ и в ΔDBA $\angle B = 90°$, катет DB общий, $BA = BC$ по условию, то $\Delta DBC = \Delta DBA$ по двум катетам. Значит, $DA = DC$.

Вывод: Если проекции наклонных равны, то и сами наклонные равны и наоборот.

3. ΔCDA – равнобедренный.

4. DK – высота, медиана и биссектриса в ΔCDA. Значит, длина отрезка DK – это расстояние от точки D до AC.
5. ΔDBK, $\angle B = 90°$, $DK = \sqrt{DB^2 + BK^2}$.
6. Что мы знаем о ΔABC? (Он равнобедренный, и мы знаем длины его сторон.) Применим теорему косинусов, $\angle B = \beta$. $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\beta$; $144 = 200 - 200 \cdot \cos\beta$; $\cos\beta = \dfrac{56}{200}$, $\cos\beta = 0,28$.
7. BK является катетом в одном из равных треугольников BKA и BKC. Рассмотрим ΔBKA, $\angle K = 90°$, $\angle KBA = \dfrac{\beta}{2}$; $KA = \dfrac{1}{2}AC$, $KA = 6$ см; $\cos\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{BK}{BA}$; $\cos^2\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{1+\cos\beta}{2}$, $\cos^2\beta = \dfrac{1,28}{2}$; $\cos^2\dfrac{\beta}{2} = 0,64$, $\cos\dfrac{\beta}{2} = -0,8$ или $\cos\dfrac{\beta}{2} = 0,8$. Так как в ΔAKB, $\angle K = 90°$ $\angle B$ острый, то $\cos\angle B > 0$. Значит, $\cos\dfrac{\beta}{2} = 0,8$. $0,8 = \dfrac{BK}{10}$, $BK = 8$ см.
8. $DK = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17$ (см).

(*Ответ*: а) BC; б) 17 см.)

III. Подведение итогов

– Какие теоретические вопросы по теме мы использовали при решении этой задачи?

Домашнее задание

§ 2, № 147, 151.

№ 147. *Дано:* $ABCD$ – прямоугольник, $MB \perp (ABCD)$ (рис. 3).

Доказать: ΔAMD и MCD – прямоугольные.

Доказательство:

1. MB – перпендикуляр, AM и MC – наклонная, AB и BC их проекции.
2. Так как $AD \perp AB$, по ТТП $AD \perp AM$, в ΔAMD $\angle A = 90°$.
3. Так как $DC \perp BC$, то по ТТП $CD \perp MC$, в ΔDCM $\angle C = 90°$.

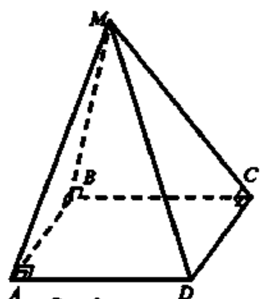


Рис. 3

№ 151. *Дано:* ΔABC, $CD \perp (ABC)$, CH – высота ΔABC.

Доказать: а) Δ ABC – проекция ΔABD на (ABC); б) DH – высота ΔABD.

Доказательство:

а) CD – перпендикуляр к (ABC), C – проекция точки D. Отрезок CB – проекция наклонной DB, а CA – проекция DA на (ABC), $AB \subset (ABC)$.

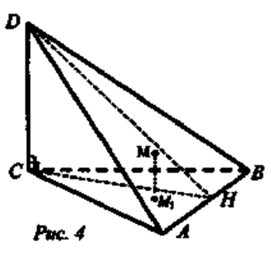


Рис. 4

Проекциями сторон ΔABC на (ABC) являются соответствующие стороны ΔABC. Если M любая внутренняя точка ΔABD, то M_1 ее проекция тоже является внутренней точкой ΔABC. Таким образом, ΔABC является проекцией ΔABD на (ABC).

б) $AB \perp CH$ по условию, $AB \perp DH$ по ТПП, то есть DH – высота ΔABD.

Урок 34. Решение задач на применение ТПП, на угол между прямой и плоскостью

Цель урока: закрепить изученный теоретический материал на практике.

Ход урока

I. Проверка домашнего задания

Два ученика на доске решают № 147, 151. После проверки этих задач остальные ученики задают дополнительные вопросы по теории. Остальные, решают № 150 (а) (можно самостоятельно с последующей проверкой).

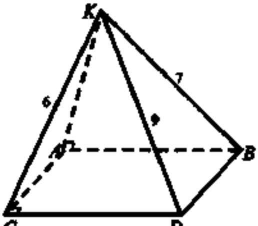


Рис. 1

Дано: $ABCD$ – прямоугольник; $AK \perp (ABC)$, $KD = 6$ см, $KB = 7$ см, $KC = 9$ см (рис. 1).

Найти: расстояние от точки K до (ABC).

Решение:

1. Длина AK – расстояние от K до (ABC) по определению.
2. Так как $DC \perp AD$, AD проекция KD, то по ТТП; $DC \perp KD$, значит, в ΔKDC $\angle D = 90°$. $KC^2 = KB^2 + KD^2 + DC^2$, $DC=\sqrt{9^2-6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ (см).
3. $CB \perp KB$ по ТТП; $KC^2 = CB^2$, $CB=\sqrt{KC^2-KB^2}$; $CB=\sqrt{9^2-7^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ (см)
4. Из ΔADC $\angle D$ 90°. $AC=\sqrt{AD^2+DC^2}$, $AC=\sqrt{45+32}=\sqrt{77}$ (см).
5. Из ΔKAC $\angle A = 90°$. $KA=\sqrt{KC^2-AC^2}$, $KA=\sqrt{81-77}=\sqrt{4}=2$ (см).

(*Ответ*: 2 см.)

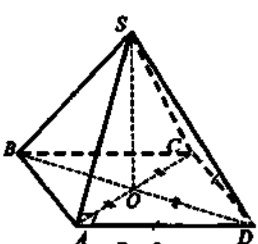


Рис 2

Задача № 2

Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O. SO – перпендикуляр к плоскости квадрата, $SO = 4\sqrt{2}$ см. а) Докажите равенство углов, образуемых прямыми SA, SC и SD с плоскостью квадрата. б) Найдите эти углы, если периметр $ABCD$ равен 32 см.

Дано: $ABCD$ – квадрат; $BD \cap AC = O$, SO – перпендикуляр к (ABC), $SO = 4\sqrt{2}$ см, $P_{ABCD} = 32$ см (рис. 2).

а) *Доказать*: $\angle(SA, (ABC) = \angle(SB, (ABC)) = \angle(SC, (ABC)), \angle(SD, (ABC))$.

б) *Найти*: $\angle(SA, (ABC)$.

а) *Доказательство:*

1. $SO \perp (ABC)$, AC, SD, SA, SB – наклонные; OC, OD, OA, OB – их проекции; $\angle(SC, (ABC)) = \angle SCO$ по определению; $\angle(SD, (ABC) = {=}\angle SDO$ и т.д.
2. $\Delta SOC = \Delta SOD = \Delta SOA = \Delta SOB$ (как прямоугольные по двум катетам: SO – общая; $OC = OD = OA = OB$ по свойству диагоналей квадрата).
3. $\angle SCO = \angle SDO = \angle SAO = \angle SBO$.

б) *Решение:*

1. $P_{ABCD} = 4 \cdot AD$, $AD = 8$ см.
2. ΔADC, $\angle D = 90°$, $AC = \sqrt{2AD^2} = AD\sqrt{2}$. $AC = 8\sqrt{2}$ см.
3. $OC = \dfrac{1}{2}AC$, $OC = 4\sqrt{2}$ см.
4. ΔSOC, $\angle O = 90°$. $\operatorname{tg}\angle C = \dfrac{OS}{OC}$, $\operatorname{tg}\angle C = \dfrac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg}\angle C = 1$, $\angle C = 45°$.

(*Ответ*: $\angle(SA, (ABC) = 45°$.)

Вывод:

Если в тетраэдре DO – перпендикуляр и боковые ребра образуют равные углы с плоскостью основания, то точка O – центр окружности, описанной около основания.

Задача 3

В тетраэдре $ABCD$ DO – перпендикуляр к (ABC). Докажите, что если перпендикуляры, проведенные из точки D к сторонам ΔABC, образуют равные углы с (ABC), то точка O – центр окружности, вписанной в ΔABC.

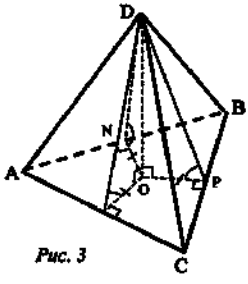


Рис. 3

Дано: $ABCD$ – тетраэдр; $DO \perp (ABC)$, $OM \perp AC$, $OP \perp CB$, $ON \perp AB$, $\angle DMO = \angle DPO = \angle DNO$.

Доказать: O – центр окружности, вписанной в ΔABC.

Доказательство:

1. $\Delta DON = \Delta DOP = \Delta DOM$ (как прямоугольные по общему катету и противолежащему острому углу).
2. $OM = OP = ON$.
3. O – центр окружности, вписанной в ΔABC, так как она равноудалена от стороны ΔABC.

Вывод:

Если боковые грани тетраэдра наклонены к плоскости основания под одним углом, то основание высоты – это центр вписанной в основание окружности.

Домашнее задание

№ 154. Дано: ΔABC, $BD \perp (ABC)$, $BD = 9$ см, $AC = 10$ см, $BC = BA = 13$ см (рис. 4).

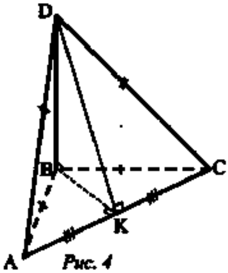


Рис. 4

Найти: а) расстояние от точки D до AC; б) $S\Delta ACD$.

Решение:

а) 1. DB – перпендикуляр, AC и DA – наклонные, так как $BA = BC$ – проекции, то $DA = DC$.

2. ΔDAC – равнобедренный, DK – высота, медиана и биссектриса, DK – расстояние от точки D до AC.

3. ΔBKA, $\angle K = 90°$; $BK = \sqrt{BA^2 - AK^2}$,

$BK = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{8 \cdot 18} = 12$ (см).

4. ΔDBK, $\angle B = 90°$. $DK = \sqrt{BD^2 + BK^2}$, $DK = \sqrt{81 + 12^2} = \sqrt{225} = 15$ (см).

б) $S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot DK$; $S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 15 = 75$ (см^2).

(*Ответ*: 15 см, 75 см^2.)

Урок 35. Повторение (решение задач на теорему о 3-х перпендикулярах)

Цель урока:

– сформировать навык в решении задач с использованием теоремы о 3-х перпендикулярах.

Ход урока

I. Проверка домашнего задания (3 мин)

Вспомнить с учащимися формулировку теоремы о 3-х перпендикулярах. (Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.)

Обратная теорема. Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярна к ней, перпендикулярна и к ее проекции.

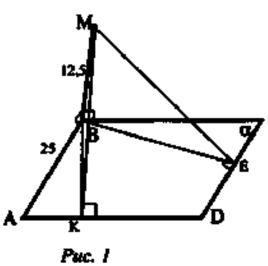


Рис. 1

II. Работа в классе (15 мин)

Решить задачи № 158 и № 161 с объяснением у доски.

№ 158

Через вершину B ромба $ABCD$ проведена прямая BM перпендикулярно к его плоскости (рис. 1).

Найти расстояние от точки M до прямых, содержащих стороны ромба, если $AB = 25$ см; $\angle BAD = 60°$; $BM = 12{,}5$ см.

Решение:

1) Проведем $BK \perp AD$. BK – проекция наклонной MK на плоскость ромба; $AD \perp BK$, то $AD \perp MK$ (по теореме о 3-х перпендикулярах). Длина MK – расстояние от точки M до прямой AD. ME – расстояние от точки M до прямой DC.
2) Из треугольника $ABK: BK = AB \sin 60° = \dfrac{25\sqrt{3}}{2}$.
3) ΔMBK – прямоугольный ($\angle B = 90°$), так как $MB \perp (ABC)$; $MK = \sqrt{MB^2 + BK^2} = \sqrt{\left(\dfrac{25}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{25\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 25$ (см).
4) $BK = BE$ (как высоты ромба); $\Delta MBK = \Delta MBE$ (по двум катетам, как прямоугольные); $ME = MK = 25$ см.
5) Расстояние от точки M до прямых AB и BC равны длине перпендикуляра MB, то есть 12,5 см.

(*Ответ*: 25 см; 25 см; 12,5 см; 12,5 см.)

№ 161

Луч BA не лежит в плоскости неразвернутого $\angle CBD$. Докажите, что если $\angle ABC = \angle ABD$, причем $\angle ABC < 90°$, то проекцией луча BA на плоскость CBD является биссектриса $\angle CBD$ (рис. 2).

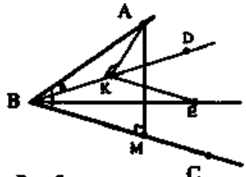


Рис. 2

Решение:

1) Пусть $AE \perp (CBD)$. В плоскости (ABC) проведем перпендикуляр AM к прямой BC, а в плоскости (ABD) перпендикуляр AK к прямой BD.

Так как $\angle ABC < 90°$, то точка M лежит на луче BC (а не на продолжении этого луча). Аналогично, так как $\angle ABD < 90°$, то точка K лежит на луче BD. Так как $BC \perp AM$, то $BC \perp EM$ (по теореме, обратной теореме о 3-х перпендикулярах).

Аналогично доказывается, что $BD \perp EK$.

2) ΔABK и ΔABM равны по гипотенузе (AB – общая) и острому углу ($\angle ABC = \angle ABD$), то $BM = BK$;
3) ΔBME и ΔBKE равны по гипотенузе (BE – общая) и катету ($BM = BK$), то $EM = EK$;
4) Точка E равноудалена от сторон $\angle CBD$, значит, она лежит на биссектрисе этого угла, то есть луч BE – биссектриса $\angle CBD$.

III. Решение задач

У доски 2 ученика решают задачи № 199 и № 202, класс решает самостоятельно (20 мин). Затем учитель вместе с классом проверяет решение задач (с комментированием)

№ 199. *Дано:* $SA = SB = SC$, $S \notin (ABC)$, M – середина гипотенузы перпендикуляра к плоскости треугольника.

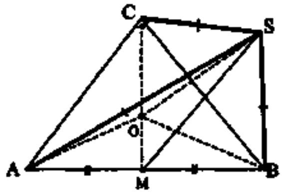


Рис. 3

Доказать: $SM \perp (ABC)$.

Решение:

1. ΔASB – равнобедренный; SM – медиана, то $SM \perp AB$ (это высота).
2. $CM \in (SCM)$ проведем $SO \perp CM$. Построим AO; BO; CO.
3. $AS = BS = CS$ – равные наклонные, то $OA = OB = OC = R$. R – радиус описанной окружности около ΔABC. $SM \perp (ABC)$.

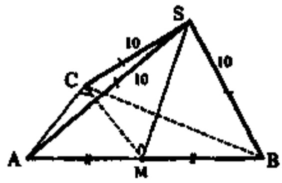


Рис. 4

№ 202. *Дано:* ΔABC, $AC \perp BC$, $SA = SB = SC = 10$ см; $CM = 5$ см – медиана (рис. 4).

Найти: SM (расстояние от точки S до плоскости (ABC)).

Решение:

1) Прямая SM, M – середина гипотенузы AB, перпендикулярна к плоскости (ABC) $SM \perp (ABC)$.

2) $SM = \sqrt{SA^2 - AM^2} = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ (см).

(*Ответ*: $5\sqrt{3}$ см.)

IV. Подведение итогов

При решении задач используется теорема о 3-х перпендикулярах.

Домашнее задание

П. 20; теорема о 3-х перпендикулярах.

Задачи: № 204, 206.

Урок 36. Угол между прямой и плоскостью (повторение)

Цели урока:

1) ввести понятие прямоугольной проекции фигуры;
2) дать определение угла между прямой и плоскостью;
3) научить решать задачи на нахождение угла между прямой и плоскостью.

Ход урока

I. Проверка домашнего задания (10 мин)

Рис. 1

Вспомнить с учащимися теорему о 3-х перпендикулярах.

№ 204. *Дано*: $OM \perp (ABC)$, OM проходим через центр правильного ΔABC; $OM = a$; $\angle MCO = \varphi$ (рис. 1).

Найти: OE; ME; $S\Delta ABC$.

Решение:

а) $OA = OB = OC = R$ – радиус описанной окружности около ΔABC, $MA = MB = MC = \dfrac{a}{\sin\varphi}$;

б) ΔABC – правильный: $CE \perp AB$, $OE = r$, r – радиус вписанной окружности; $ME \perp AB$ (по теореме о 3-х перпендикулярах); ME – расстояние от точки M до AB; OC = arctg φ; $OE = \frac{1}{3}EC$; $R = OC = \frac{2}{3}EC$;

$\text{arctg}\,\varphi = \frac{2}{3}EC$, $EC = \frac{3a}{2}\text{ctg}\,\varphi$; $OE = r = \frac{\text{arctg}\varphi}{2}$.

в) Из $\Delta MOE: ME = \sqrt{OM^2 + OE^2} = \frac{a}{2}\sqrt{4 + \text{ctg}^2\varphi}$.

г) Длина окружности $C = 2\pi\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3\text{arctg}\varphi}{2} = 2\pi\,\text{arctg}\varphi$.

д) $C = 2\pi R = 2\pi\cdot OC$; $C = 2\pi\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3\text{arctg}\varphi}{2} = 2\pi\,\text{arctg}\varphi$.

е) $S\Delta ABC = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4}$; $BE = CE$ ctg 60° $= \frac{\sqrt{3}}{2}$ arctg φ; $AB = \sqrt{3}$ arctg φ;

$S\Delta ABC = \frac{3a^2\,\text{ctg}^2\varphi\cdot\sqrt{3}}{4}$.

(*Ответ*: а) $\frac{\text{arctg}\varphi}{2}$; $\frac{a}{2} = \sqrt{4 + \text{ctg}^2\varphi}$; б) 2π arctg φ; в) $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2\,\text{ctg}^2\varphi$.)

№ 206. *Дано:* AB = 17 см; AC = 15 см; BC = 8 см, $AM \perp (ABC)$, $\angle A$ – меньший, AM = 20 см (рис. 2).

Найти: ME.

Решение:

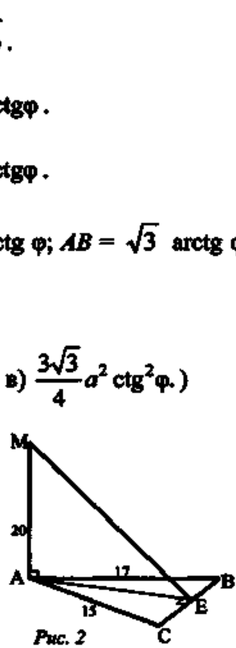


Рис. 2

1) В ΔABC против меньшей стороны лежит меньший угол (по теореме синусов). Проведем $AE \perp BC$, $AE \perp ME$. По теореме о 3-х перпендикулярах $ME \perp BC$.
2) По формуле Герона:

$S_{\Delta ABC} = \sqrt{P(P-a)(P-в)(P-c)}$; $S_{\Delta ABC} = \sqrt{P(P-AB)(P-BC)(P-AC)}$;

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC\cdot AE = 4AE$; $P = \frac{15+17+8}{2} = 20$ (см); $S_{\Delta ABC} = \sqrt{20\cdot 5\cdot 3\cdot 12} =$

$= \sqrt{100\cdot 36} = 60$ (см2); $4AE = 60$; $AE = 15$ см. По теореме Пифагора:

$ME = \sqrt{MA^2 + AE^2}$, $ME = \sqrt{400 + 225} = \sqrt{625} = 25$(см).

(*Ответ*: 25 см.)

II. Объяснение материала (8 мин)

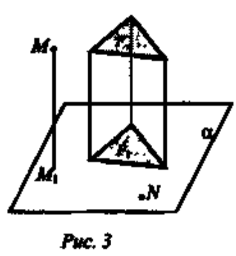


Рис. 3

Проекция произвольной фигуры – основание перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости, если точка не лежит в плоскости, и сама точка, если она лежит в плоскости (рис. 3).

M_1 – проекция точки M на плоскость α; N – проекция самой точки N; ($N \in \alpha$); F – фигура в пространстве; F_1 – проекция фигуры F на данную плоскость.

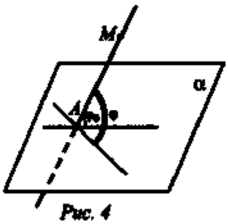


Рис. 4

Определение:

Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость (рис. 4).

φ_0 – угол между прямой AM и плоскостью α является наименьшим из всех углов φ, которые данная прямая образует с прямыми, проведенными в плоскости α через точку A.

1) Если прямая перпендикулярна к плоскости, то ее проекцией на эту плоскость является точка пересечения этой прямой с плоскостью. Угол между прямой и плоскостью считается равным 90°.
2) Если прямая параллельна плоскости, то ее проекцией на плоскость является прямая, параллельная данной.

Понятие угла между прямой и плоскостью не вводим.

Угол между параллельными прямой и плоскостью считать равным 0°.

III. Закрепление материала (14 мин)

1. Учащиеся оформляют в тетрадях решение задачи № 162 из учебника и решение задачи на доске (9 мин.).

Задача

Найдите угол между скрещивающимися прямыми AB и PQ, если каждая из точек P и Q равноудалена от концов отрезка AB.

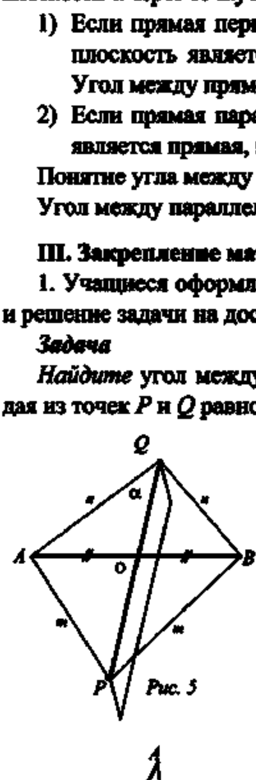


Рис. 5

Решение: $PA = PB = m$; $QA = QB = n$. Точки P и Q лежат в плоскости α, проходящей через середину AB и $AB \perp \alpha$. $PQ \subset \alpha$ и $PQ \perp AB$, то есть искомый угол 90°. (*Ответ*: 90°.)

2. Один из учеников у доски решает задачу (5 мин.)

№ 163 (учащиеся решают в тетрадях)

Дано: $AM = d$; $\angle AMB = \varphi$; а) 45°; б) 60°; в) 30° (рис. 6).

Найти: MB.

Решение:

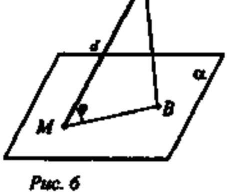


Рис. 6

а) $MB = d\cos\varphi = d \cdot \cos 45° = \dfrac{d\sqrt{2}}{2}$;

б) $MB = d\cos 60° = d \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{d}{2}$;

в) $MB = d\cos 30° = \dfrac{d\sqrt{3}}{2}$.

(*Ответ*: а) $\dfrac{d\sqrt{2}}{2}$; б) $\dfrac{d}{2}$; в) $\dfrac{d\sqrt{3}}{2}$.)

IV. Самостоятельная работа (7 мин)

Вариант I. Задача № 208.

Вариант II. Задача № 209.

№ 208 (рис. 7)

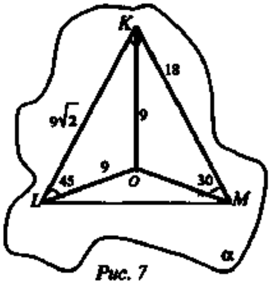


Рис. 7

1) ΔLOK и ΔMOK – прямоугольные (по условию $KO \perp \alpha$).

2) ΔLOK: $KL = 9\sqrt{2}$, $\frac{KO}{\sin 45^\circ} = \frac{9}{\sqrt{2}/2} =$

$= KL = \frac{9 \cdot 2}{\sqrt{2}} = \frac{9 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}$.

3) ΔMOK: $KM = 2 \cdot OK = 2 \cdot 9 = 18$ (OK лежит против угла в 30°).

4) ΔKLM – прямоугольный, $LM = \sqrt{KL^2 + MK^2} = \sqrt{(9\sqrt{2})^2 + 18^2} = 9\sqrt{6}$ (см).

(*Ответ*: $9\sqrt{6}$ см.)

Домашнее задание

П. 21, задачи № 164 и № 165. п. 20.

№ 209 (рис. 8)

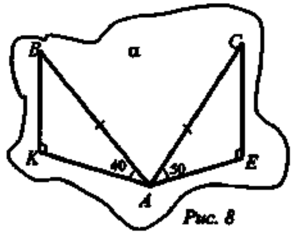


Рис. 8

1) *Проведем* $CE \perp \alpha$, $BK \perp \alpha$.

Пусть $AB = AC = a$, тогда $BK = a \sin 40^\circ$, $CE = a \sin 50^\circ$.

2) Так как $\sin 50^\circ > \sin 40^\circ$, то $CE > BK$ расстояние от точки C больше.

(*Ответ*: расстояние от точки C до плоскости больше.)

§ 3. ДВУГРАННЫЙ УГОЛ. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ (уроки 37–44)

Урок 37. Двугранный угол

Цели урока:

1) ввести понятие двугранного угла и его линейного угла;
2) рассмотреть задачи на применение этих понятий;
3) сформировать конструктивный навык нахождения угла между плоскостями.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

1. Сообщить итоги самостоятельной работы.

Анализ распространенных ошибок.

2. Проверка домашнего задания.
3. Подготовка к изучению нового материала.

– Что называется углом на плоскость?

– Что называется углом между прямыми в пространстве?

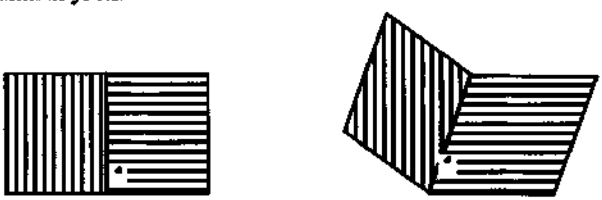
– Что называется углом между прямой и плоскостью?

III. Изучение нового материала

1. Понятие двугранного угла (рис. 1 *а*, *б*).

а) прямая a разделяет плоскость на две полуплоскости;

б) двугранный угол.



а) *б)*

Рис. 1

Вывод:

Двугранным углом называется фигура, образованная прямой a и двумя полуплоскостями с общей границей a, не принадлежащими одной плоскости.

Полуплоскости – грани, прямая a – ребро двугранного угла.

– Какие предметы в обыденной жизни имеют форму двугранного угла?

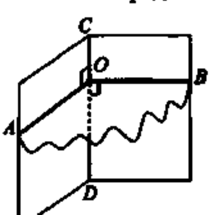


Рис. 2

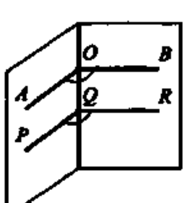


Рис. 3

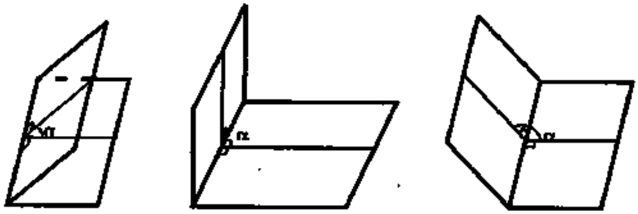
(Полураскрытая папка, стена комнаты совместно с полом, двускатные крыши зданий и т.д.)

2. Пусть $O \in a$, $AO \perp a$, $BO \perp a$, $\angle AOB$ – линейный угол двугранного угла (рис. 2, 3).
3. Все линейные углы двугранного угла равны.

Докажем это.

Рассмотрим два линейных угла AOB и PQK. Лучи OA и QP лежат в одной грани и перпендикулярны OQ, значит, они сонаправлены. Аналогично лучи OB и QR сонаправлены. Значит, $\angle AOB = \angle PQR$ (как углы с сонаправленными сторонами).

4. Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла.



а) *б)* *в)*

Рис. 4

а) острый ($\alpha < 90°$); б) прямой ($\alpha = 90°$); в) тупой ($90° < \alpha < 180°$).

5. Обозначение двугранного угла.

Двугранный угол с ребром AB, на разных гранях которого отмечены точки C и D, называется двугранным углом $CABD$.

IV. Закрепление изученного материала

1. Сделайте чертежи к задачам

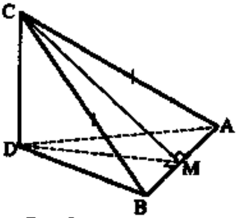


Рис. 5

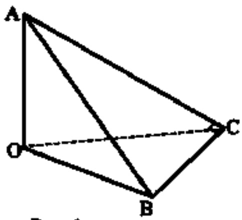


Рис. 6

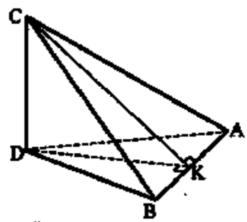


Рис. 7

№ 1	№ 2	№ 3
Дано: $\triangle ABC$, $AC = BC$, AB лежит в плоскости α, $CD \perp \alpha$, $C \notin \alpha$ (рис. 5). *Построить* линейный угол двугранного угла $CABD$, $CM \perp AB$, $DC \perp AB$. $\angle CMD$ – искомый.	*Дано:* $\angle ABC$, $\angle C = 90°$, BC лежит плоскости α, $AO \perp \alpha$, $A \in \alpha$ (рис. 6). *Построить* $ABCO$. $AB \perp BC$, $AO \perp BC$, значит, $OC \perp BC$. $\angle ACO$ – искомый.	*Дано:* $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, AB лежит в плоскости α, $CD \perp \alpha$, $C \notin \alpha$ (рис. 7). *Построить* $DABC$. $CK \perp AB$, $DC \perp AB$, $DK \perp AB$, значит, $\angle DKC$ – искомый.

Дано: $ABCD$ – квадрат, $MB \perp ABC$ (рис. 8).

Построить:

а) $(MDC; ABC)$; б) $MADB$; а) $\angle MCB$ – искомый;

б) $\angle MAD$ – искомый.

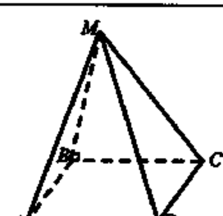


Рис. 8

Дано: $DABC$ – тетраэдр, $DO \perp ABC$ (рис. 9).

Построить: $ABCD$

$DM \perp BC$, $DO \perp BC$, значит, $OM \perp BC$; $\angle OMD$ – искомый.

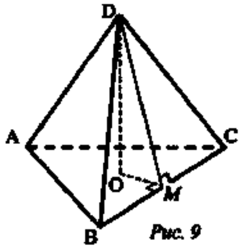


Рис. 9

2. Решение задач

№ 171. *Дано:* ΔABC, $\angle C = 90°$, $AC = BC$, AB лежит в плоскости α, угол между CB и α 30° (рис. 9).

Найти: угол между плоскостью α и плоскостью треугольника ABC.

Решение:

1) Проведем $CO \perp \alpha$. Тогда $\angle CBO = 30°$. Пусть в ΔCOB $CO = a$, тогда $CB = 2a$.

2) Проведем $CD \perp AB$, тогда $AB \perp DO$ по теореме, обратной теореме о трех перпендикулярах. $\angle CDO$ – искомый угол.

3) Из ΔCDB, $\angle CBD = 45°$, $CD = CB \cdot \sin 45°$, $CD = a\sqrt{2}$. 4) Из ΔCDO: $\sin\angle CDO = = \frac{CO}{CD} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\angle CDO = 45°$.

(*Ответ*: 45°.)

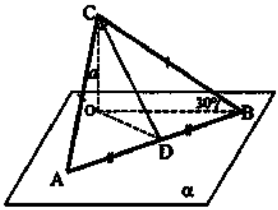


Рис. 10

№ 175 (устно).

V. Подведение итогов

Домашнее задание

П. 22 № 167, 170.

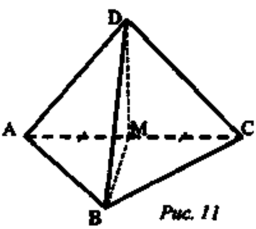


Рис. 11

№ 167. *Дано:* $DABC$ – тетраэдр; $DA = = DB > DC = AB = BC = AC$, $M \in AC$, $AM = MC$ (рис. 11).

Доказать: $\angle DMB$ – линейный угол двугранного угла $BACD$.

Решение: Так как ΔABC и ΔADC – равнобедренные, то медианы BM и DM являются высотами. Значит, $BM \perp AC$, $DM \perp AC$. $\angle DMB$ – линейный угол двугранного угла $BACD$.

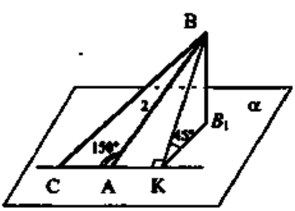


Рис. 12

№ 170. *Дано:* ΔABC, AC лежит в плоскости α, $BB_1 \perp \alpha$, $AB = 2$, $\angle BAC = 150°$, двугранный угол $BACB_1$ равен 45° (рис. 12).

Найти: расстояние от точки B до прямой AC и до α.

Решение:

1) ΔABC – тупоугольный ($\Delta BAC > 150°$), поэтому $K \notin AC$. Проведем $BK \perp CK$.

2) Так как $AC \perp BK$, то $AC \perp B_1K$ по теореме, обратной теореме о трех перпендикулярах. Значит, $\angle BKB_1$ – линейный угол двугранного угла $BACB$, $\angle BKB_1 = 45°$.

3) Из ΔBAK: $\angle A = 180° - 150° = 30°$, $BK = BA \sin 30° = 2\frac{1}{2} = 1$. Из

ΔBKB_1: $BB_1 = BK_1 \cdot \sin 45° = 1\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(*Ответ*: $BK = 1$, $BB_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.)

Дополнительные задачи

I уровень

Треугольник ABC – прямоугольный ($\angle C = 90°$), $\angle A = 30°$, $AC = a$, $DC \perp ABC$, $DC = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Чему равен угол между плоскостями ADC и ACB?

Дано: ΔABC, $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $AC = a$, $DC \perp ABC$, $DC = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Найти: угол между плоскостями ADB и ACB.

Решение:

1) $DK \perp AB$, $CD \perp AB$, значит, $CK \perp AB$; $\angle DKC$ – искомый.
2) Из ΔAKC: $CK = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}$ (катет противолежащей 30°)
3) Рассмотрим ΔDCK: $\angle C = 90°$, $DC = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $CK = \frac{a}{2}$. $\operatorname{tg}\angle DKC = \frac{DC}{CK} = \frac{\sqrt{3}/2a}{\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{3}$, $\angle DKC = 60°$.

(*Ответ*: 60°.)

II уровень

Через сторону ромба $ABCD$ проведена плоскость α.

Сторона AB составляет с этой плоскостью угол 30°. Найдите угол между плоскостью ромба и плоскостью α, если острый угол ромба равен 45°.

Дано: $ABCD$ – ромб, α, AD лежит в плоскости α, $\angle DAB = 45°$, угол между плоскостью α и стороной AB составляет 30° (рис. 13).

Найти: угол между плоскостью ромба и плоскостью α.

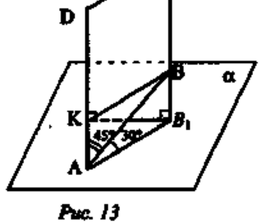


Рис. 13

Решение:

1. Проведем $BB_1 \perp \alpha$. Тогда углом между стороной AB и плоскостью α будет угол BAB_1; $BK \perp AD$, $BB_1 \perp AD$, значит, $KB_1 \perp AD$, $\angle BKB_1$ – угол между плоскостью ромба и плоскостью α.
2. Обозначим $AB = a$, тогда $BB1 = \frac{a}{2}$ (противолежащий 30°).

3. Из ΔAKB: $\angle A = 45°$; $\angle K = 90° \Rightarrow \angle B = 45°$. По теореме Пифагора: $AB^2 = AK^2 + BK^2$, а $AK = BK$, следовательно, $2BK^2 = AB^2$, $2BK^2 = a^2$, $BK^2 = \frac{a^2}{2}$, $BK = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

4. Из ΔKB_1B: $\angle B_1 = 90°$, $\sin \angle BKB_1 = \frac{BB_1}{KB} = \frac{a}{2} : \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\angle BKB_1 = 45°$.

(*Ответ*: 45°.)

Урок 38. Признак перпендикулярности двух плоскостей

Цели урока:

1) ввести понятие угла между плоскостями;
2) дать определение перпендикулярных плоскостей;
3) доказать признак перпендикулярности двух плоскостей;
4) показать применение этого признака при решении задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация опорных знаний

Двое учеников у доски записывают решение домашнего задания: первый – № 167, второй – № 170.

Остальные отвечают на вопросы:

Точка A лежит на ребре двугранного угла.

1. Верно ли, что $\angle ABC$ – линейный угол двугранного угла, если лучи AB и AC перпендикулярны его ребру? (Нет.)
2. Верно ли, что $\angle BAC$ – линейный угол двугранного угла, если лучи AB и AC лежат в гранях двугранного угла? (Нет.)
3. Верно ли, что $\angle BAC$ – линейный угол двугранного угла, если лучи AB и AC перпендикулярны его ребру, а точки B и C лежат на гранях угла? (Да.)
4. Линейный угол двугранного угла равен 80°. Найдется ли в одной из граней угла прямая, перпендикулярная другой грани? (Нет.)
5. $\angle ABC$ – линейный угол двугранного угла с ребром a. Перпендикулярна ли прямая a плоскости ABC? (Да.)
6. Верно ли, что все прямые, перпендикулярные данной плоскости и пересекающие данную прямую, лежат в одной плоскости? (Да.)

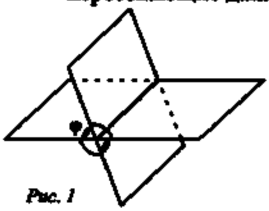


Рис. 1

– Что называется углом между прямыми?
– Двугранным линейным углом двугранного угла?
– Углом между прямой и плоскостью?

III. Изучение нового материала

1. При пересечении двух плоскостей образуются четыре двугранных угла. Углом между пересекающимися плоскостями называется линейный угол φ этого двугранного угла, который $0° < \varphi \le 90°$ (рис. 1).

2. Если $\varphi = 90°$, то плоскости называются перпендикулярными (взаимно перпендикулярными) (рис. 2).
3. Приведите примеры взаимно перпендикулярных плоскостей (плоскости стены и пола, стены и потолка комнаты).

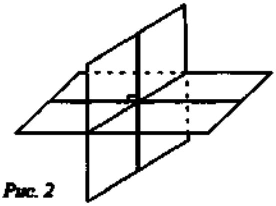


Рис. 2

Ясно, что в этих случаях каждый из четырех двугранных углов, образованных пересекающимися плоскостями, прямой (рис. 2).

3. Рассмотрим признак перпендикулярности двух плоскостей.

Теорема

Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

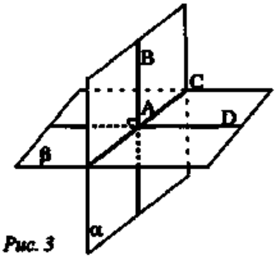


Рис. 3

Дано: α, β, AB лежит в плоскости α, $AB \perp \beta$, $AB \cap \alpha = A$ (рис. 3).

Доказать: $\alpha \perp \beta$.

Доказательство: $\alpha \cap \beta = AC$, $AB \perp AC$, так как $AB \perp \beta$ по условию. Проведем в плоскости β $AD \perp AC$. $\angle BAD$ – линейный угол двугранного угла. Но $\angle BAD = 90°$, так как $BA \perp \beta$. Значит, $\alpha \perp \beta$.

IV. Формирование навыков и умений учащихся

1. При решении задач используются утверждения:
   а) Плоскость, перпендикулярная к ребру двугранного угла, перпендикулярна к его граням (следствие).
   б) Перпендикуляр, проведенный из любой точки одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей к линии их пересечения, есть перпендикуляр к другой плоскости (№ 178).

2. *№ 172. Дано:* ΔABC, $\angle C = 90°$, AC лежит в плоскости α, угол между плоскостями α и ABC равен $60°$, $AC = 5$ см, $AB = 13$ см (рис. 4).

Найти: расстояние от точки B до плоскости α.

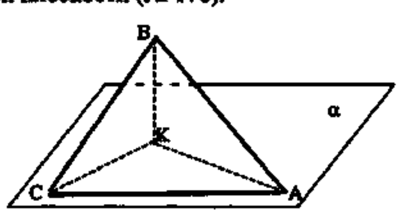


Рис. 4

Решение: Построим $BK \perp \alpha$. Тогда KC – проекция BC на эту плоскость. $BC \perp AC$ по условию, значит, по теореме о трех перпендикулярах, $KC \perp AC$. Отсюда следует, что $\angle BCK$ – линейный угол двугранного угла между плоскостью α и плоскостью треугольника $\angle BCK = 60°$. Из ΔBCA по теореме Пифагора: $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$ (см).

Из ΔBKC: $BK = = BC \cdot \sin 60° = 12\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6 \cdot \sqrt{3}$ (см). (*Ответ*: $6\sqrt{3}$ см.)

3. Разобрать домашнее задание № 173, 174.

Наметить план решения № 173, 174.

V. Подведение итогов

Домашнее задание

П. 23 № 173, № 174.

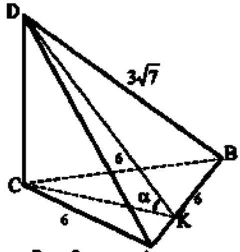


Рис. 5

№ 173. Дано: $ABCD$ – тетраэдр, $CD \perp (ABC)$. $AB = BC = AC = 6$, $BD = 3\sqrt{7}$ (рис. 5).

Найти: двугранные углы $DACB$, $DABC$, $BDCA$.

Решение:

1) Так как $DC \perp (ABC)$, то $(DCA) \perp (ABC)$ (признак перпендикулярности двух плоскостей) следовательно, двугранный угол $DACB$ прямой.
2) Проведем $CK \perp AB$, тогда $AB \perp DK$ по Теореме о трех перпендикулярах, следовательно, $\angle DKC$ – линейный угол двугранного угла при ребре AB тетраэдра. Из ΔACK: $CK = AC \cdot \sin 60^\circ = 6\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.
3) Из ΔBDK имеем: $BK = 3$, $DK = \sqrt{BD^2 - BK^2} = \sqrt{(3\sqrt{7})^2 - 3^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$.
4) Пусть $\angle CKD = \alpha$, тогда $\cos\alpha = \frac{CK}{DK} = \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha = 45^\circ$. Значит, двугранный угол $DABC = 45^\circ$.
5) Так как $BC \perp DC$ и $AC \perp DC$, то $\angle ABC$ – линейный угол двугранного угла $BDCA$. $\angle ACB = 60^\circ$ (ΔABC – равносторонний), то двугранный угол $BDCA$ равен 60°.

(*Ответ*: 90°, 45°, 60°.)

№ 174. Дано: $ABCD$ – тетраэдр, $\angle DAB = \angle DAC = \angle ACB = 90^\circ$, $AC = CB = 5$, $DB = 5\sqrt{5}$.

Найти: двугранный угол $ABCD$.

Решение:

1) Так как $\angle DAB = \angle DAC = \angle ACB = 90^\circ$ по условию, то $DA \perp AB$, $DA \perp AC$. Значит, DA – перпендикуляр к плоскости ABC, AC – проекция наклонной DC на плоскость ABC.

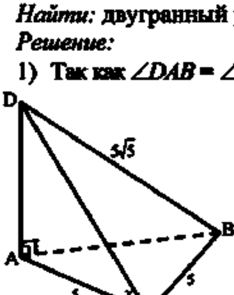


Рис. 6

2) По условию задачи $\angle ACB$ прямой, то есть $BC \perp AC$, следовательно, $BC \perp DC$ по теореме о трех перпендикулярах. Таким образом, $\angle ACD$ – линейный угол двугранного угла $ABCD$.
3) Из ΔDCB: по теореме Пифагора $DC = \sqrt{DB^2 - BC^2} = \sqrt{(5\sqrt{5})^2 - 5^2} = = \sqrt{125 - 25} = \sqrt{100} = 10$.

4) Из ΔDAC получаем: пусть $\angle ACD = x$, тогда $\cos x = \dfrac{AC}{DC} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$, $x = 60°$.

(*Ответ*: 60°.)

Урок 39. Прямоугольный параллелепипед

Цели урока:

1) ввести понятия прямоугольного параллелепипеда;
2) рассмотреть свойства его граней, двугранных углов, диагоналей.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели.

II. Проверка домашнего задания

Двое учеников у доски записывают решение домашнего задания: № 173 и № 174.

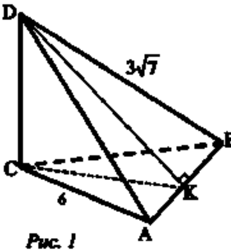


Рис. 1

№ 173. Дано: $ABCD$ – тетраэдр; $CD \perp (ABC)$; $AB = BC = AC = 6$; $BD = 3\sqrt{7}$ (рис. 1).

Найти: двугранные углы $DACB$, $DABC$, $BDCA$.

Решение:

1) Так как $DC \perp (ABC)$, то $DCA \perp ABC$ по признаку перпендикулярности двух плоскостей, двугранный угол $DACB$ – прямой.
2) Проведем $CK \perp AB$, тогда $AB \perp DK$ (по теореме о трех перпендикулярах), значит, $\angle DKC$ – линейный угол двугранного угла при AB. Из ΔACK: $CK = AC \cdot \sin 60°$, $CK = 6 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$. Из BDK: $BK = \dfrac{1}{2}$, $AB = 3$ (CK – высота равнобедренного треугольника). По теореме Пифагора $DK = \sqrt{DB^2 - BK^2} = \sqrt{(3\sqrt{7})^2 - 3^2} = \sqrt{7 \cdot 9 - 9} = \sqrt{54} = \sqrt{9 \cdot 6} = 3\sqrt{6}$, $DK = 3\sqrt{6}$, $\cos\angle CKD = \dfrac{CK}{DK} \cdot CK = \sqrt{AC^2 - AK^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$. Из прямоугольного ΔDCK по теореме Пифагора $DK = \sqrt{DB^2 - CB^2}$. DC находится из прямоугольного ΔDCB – по теореме Пифагора $DC = \sqrt{DB^2 - CB^2} = \sqrt{(3\sqrt{7})^2 - 6^2} = \sqrt{54 - 36} = \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 9} = 3\sqrt{2}$ $\cos\angle CKD = \dfrac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{6}} = \sqrt{\dfrac{3}{6}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\angle CKD = 45°$.
3) Так как $BC \perp DC$ и $AC \perp DC$, то угол $\angle ACB$ линейный угол двугранного угла $BDCA$. Так как ΔABC – равносторонний $\Rightarrow \angle ACB = 60°$, то двугранный угол равен 60°.

(*Ответ*: 60°, 45°, 90°.)

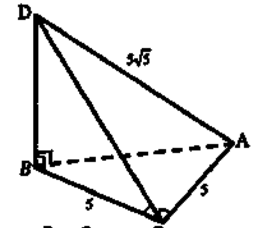


Рис. 2

№ 174. *Дано:* $ABCD$ – тетраэдр; $AC = CB = 5$; $DB = 5\sqrt{5}$; $\angle DAB = \angle DAC = \angle ACB = 90°$ (рис. 2).

Найти: двугранные углы тетраэдра $ABCD$.

Решение: $DA \perp AB$, $DA \perp AC \Rightarrow DA \perp ABC$, значит, AC – проекция DC на плоскость ABC, $\angle ABC = 90°$, $BC \perp AC$, значит, $BC \perp DC$ по теореме о трех перпендикулярах, $\angle ACD$ – линейный угол двугранного угла $ABCD$. Из ΔACD: $DC = \sqrt{DB^2 - CB^2}$, $DC = \sqrt{(5\sqrt{5})^2 - 5^2} = \sqrt{125-25} = \sqrt{100} = 10$. Из ΔDCA: $\cos\angle ACB = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$, $\angle ACD = 60°$. (*Ответ*: 60°.)

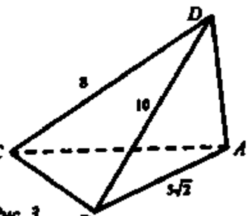


Рис. 3

Двое учеников решают по карточкам:

Дано: $ABCD$ – тетраэдр; $DC = 8$ см, $CB = 6$ см; $AD \perp ABC$; $\angle DCB = 90°$, $\angle DBA = 45°$ (рис. 3).

Найти: AD.

Решение: ΔDCB: $DB = \sqrt{CD^2 + CB^2}$; $DB = \sqrt{8^2 - 6^2}$; $DA \perp ABC \Rightarrow \Delta DAB$ – прямоугольный; $\angle A = 90°$, так как $\angle DBA = 45°$ $\Rightarrow \Delta DAB$ – прямоугольный равнобедренный. $AD = AB = x$, по теореме Пифагора $AB^2 + AD^2 = BD^2$; $x^2 + x^2 = 10^2$; $2x^2 = 100$; $x^2 = 50$; $x = \sqrt{50}$; $x = 5\sqrt{2}$. (*Ответ*: $5\sqrt{2}$.)

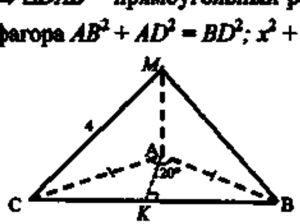


Рис. 4

Дано: $MABC$ – тетраэдр, $MA \perp ABC$, $MC = 4$ см; $CB = 6$ см, $\angle CAB = 120°$; $AC = AB$ (рис. 4).

Найти: MB, ABC.

Решение: ΔCMB : $MB = CM = 4$ см (так как $CA = AB$, $MA \perp CAB \Rightarrow$ наклонные тоже будут равны; в ΔCAB проведем высоту AK, так как $CA = AB$ по условию $\Rightarrow \Delta CAB$ – равнобедренный. AK – является медианой и высотой; $AK = \dfrac{1}{2}CB, AK = \dfrac{1}{2}\cdot 6 = 3$ см; $\angle KAB = 120 : 2 = 60°$; $\angle KBA = 30°$; $KB^2 = AB^2 - AK^2$; обозначим $AK = x$, получим уравнение: $3^2 = (2x)^2 - x^2$; $9 = 3x^2$; $x^2 = 3$; $x = \sqrt{3}$ (см) $AB = 2\sqrt{3}$ см; ΔMAB: $\cos\angle ABM = \dfrac{AB}{MB}$; $\cos\angle ABM = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\angle ABM = 30°$. (*Ответ*: 30°.)

Остальные учащиеся решают задачу.

Постройте сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, которое проведено через середины ребер AB, AD и A_1B_1. Каким многоугольником является это сечение?

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед, $L \in A_1B_1$, L – середина A_1B_1, $M \in AD$, M – середина AD; $K \in AB$, K – середина AB (рис. 5).

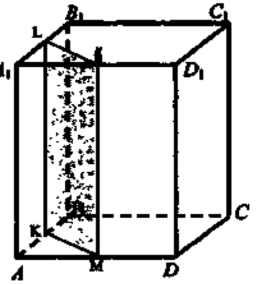


Рис. 5

Построить: 1) сечение LKM; 2) Каким многоугольником является сечение.

Построение:

1) $LKM \cap A_1AB = L$.
2) $LKM \cap ABC = M$.
3) Грани ABC параллельны $A_1B_1C_1$, значит, отрезки сечения параллельны.
4) Строим $LN \parallel KM$.
5) $KLNM$ – параллелограмм.

Ответьте на вопросы:

- Что называется параллелепипедом?
- Грани, вершины, противоположные вершины, противоположные ребра, диагональ параллелепипеда.
- Свойства параллелепипеда.

Объяснение темы

1) Определение прямоугольного параллелепипеда

Параллелепипед называется прямоугольным, если его боковые ребра перпендикулярны к основанию, а основания представляют собой прямоугольники.

2) Свойства прямоугольного параллелепипеда:

1. В прямоугольном параллелепипеде все шесть граней – прямоугольники.

Полуплоскости, в которых расположены смежные грани параллелепипеда, образуют двугранные углы, которые называются двугранными углами параллелепипеда.

2. Все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда – прямые.

Самостоятельно доказать свойство.

3) Понятия измерений прямоугольного параллелепипеда.

4) Теорема: $AB^2 + BC^2 + AA_1^2 = AC_1^2$.

Доказательство предлагается учащимся выполнить самостоятельно.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед.

Доказать: $AC_1^{\,2} = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$.

Доказательство: так как $CC_1 \perp ABCD \Rightarrow \angle ACC_1$ – прямой из прямоугольника ΔACC_1: по теореме Пифагора $AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2$; AC – диагональ прямоугольника $ABCD$, поэтому $AC^2 = AB^2 + AD^2$; $CC_1 = AA_1$, следовательно, $AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$, теорема доказана.

Следствие: **диагонали параллелепипеда равны.**

Предложить учащимся назвать все диагонали:

$AC_1 = DB_1 = \mathrm{BD}_1 = CA_1 = DB_1 = CD_1$.

III Формирование навыков и умений учащихся

№ 187в. *Дано:* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед; $AB=\sqrt{39}$; $AD=7$; $AA_1=9$.

Найти: AC_1.

Решение: $AC_1^2=AB^2+AD^2+AA_1^2$; $A2=AC_1^2=(\sqrt{39})^2+72+92=39+$ $+49+81=169$; $A=\sqrt{AC_1^2}$, $A=\sqrt{169}=13$. (*Ответ*: 13.)

№ 190в. *Дано:* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб; K – середина A_1D_1 (рис. 6).

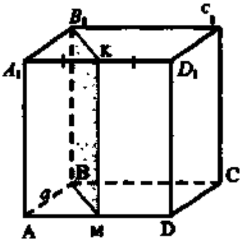


Рис. 6

Найти: Двугранный угол A_1BB_1K.

Решение: Плоскости $A_1B_1B\cap KB_1B=B_1B$; $BB_1\perp A_1B_1C_1$, значит, $A_1B_1\perp A_1B_1C_1$, значит, $A_1B_1\perp A_1B_1C_1$ и $B_1K\perp A_1B_1C_1$ (по определению перпендикулярной прямой и плоскости); $\angle A_1B_1K$ – линейный угол двугранного угла KB_1BA из прямоугольного ΔA_1B_1K; $\angle A_1$ – прямой, $\operatorname{tg}\angle A_1B_1K=$ $=\frac{A_1K}{A_1B_1}$; $A_1K=\frac{1}{2}A_1D_1$ (K – середина A_1D_1 – по условию); $A_1B_1=a$ – все ребра у куба равны; $\operatorname{tg}\angle A_1B_1K=\frac{1/2\,a}{a}=\frac{1}{2}$; $\angle A_1B_1K=$ $=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. (*Ответ*: $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.)

№ 193. *Дано:* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед. $D_1B=d$; $AC=m$; $AB=n$ (рис. 7).

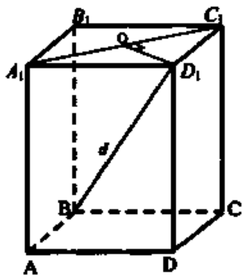


Рис. 7

Найти: расстояние между прямой DD_1 и плоскостью ACC_1.

Решение: $DD_1\parallel AA_1C_1$ (так как $DD_1\parallel AA_1$, признак параллельности прямой и плоскости). Проведем $DO_1\perp A_1C_1$. $A_1C_1=AC=m$; $D_1C_1=AB=n$;

$A_1D_1=\sqrt{A_1C_1^2-D_1C_1^2}$; $A_1D_1=\sqrt{m^2-n^2}$;

$S_{A_1D_1C_1}=\frac{1}{2}n\sqrt{m^2-n^2}$; $S_{A_1D_1C_1}=\frac{1}{2}D_1O\cdot A_1C_1$;

$D_1O=\frac{2S_{A_1D_1C_1}}{A_1C_1}$ $D_1O=\frac{2n\sqrt{m^2-n^2}}{2m}=\frac{n\sqrt{m^2-n^2}}{m}$. (*Ответ*: $D_1O=\frac{n\sqrt{m^2-n^2}}{m}$.)

IV. Подведение итогов

Домашнее задание:

П. 24, *А* – № 187*б*; 193*а*; 190*а*; *В* – 1) № 217.

2) *Дано:* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб; $OM\perp DC$; $B_1D=d$ (рис. 8).

Найти: O_1M.

Решение: обозначим $AD=x$, тогда DD_1-x, $DC-x$; $B_1D^2=AD^2+DD_1^2+DC^2$

по теореме; $BD^2 = x^2 + x^2 + x^2$; $d^2 = 3x^2$; $x^2 = \frac{d^2}{3}$; $x = \sqrt{\frac{d^2}{3}} = \frac{d}{\sqrt{3}}$;

$OO_1 = \frac{1}{2}DD_1$; $OO_1 = \frac{x}{2}$; $OM = \frac{1}{2}AD$; $OM = \frac{x}{2}$; $OO_1 = \frac{d}{2\sqrt{3}}$; $OM = \frac{d}{2\sqrt{3}}$

по теореме Пифагора $O_1M = \sqrt{OO_1^2 + OM^2}$; $O_1M = \sqrt{\left(\frac{d}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{d}{2\sqrt{3}}\right)^2} =$

$= \sqrt{\frac{d^2}{4\cdot 3} + \frac{d^2}{4\cdot 3}} = \sqrt{\frac{2d^2}{12}} = \sqrt{\frac{d^2}{6}} = \frac{d}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}d}{6}$. (*Ответ*: $\frac{\sqrt{6}d}{6}$.)

№ 187б. *Дано:* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямоугольный параллелепипед; $AB = 8$; $BC = 9$; $AA_1 = 12$ (рис. 9).

Найти: AC_1.

Решение: По теореме $AC_1 =$ $\sqrt{AB^2 + BC^2 + AA_1^2}$; AC_1 $= \sqrt{8^2 + 9^2 + 12^2} = \sqrt{64+81+144} = \sqrt{289} = 17$.

(*Ответ*: 17.)

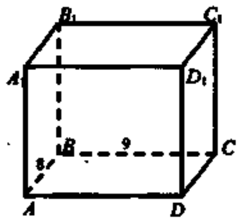


Рис. 9

№ 193а. *Дано:* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямоугольный параллелепипед; $AB = n$, $BD = d$, $BD = m$ (рис. 10).

Найти: AA_1.

Решение: $AA_1 \perp A_1B_1C_1D_1$; $AA_1 \perp ABCD$; $ABCD \parallel A_1B_1C_1D_1$, расстояние между плоскостями равно AA_1 по свойству прямоугольника $BD = AC = m$, из прямоугольного ΔBD_1D по теореме Пифагора $DD_1 = \sqrt{BD_1^2 - BD^2} =$

$= \sqrt{d^2 - m^2}$; $AA_1 = DD_1 = \sqrt{d^2 - m^2}$. (*Ответ*: $\sqrt{d^2 - m^2}$.)

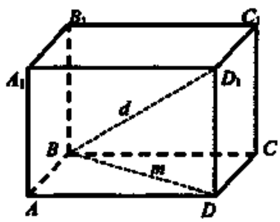


Рис. 10

Урок 40. Решение задач на свойства прямоугольного параллелепипеда

Цели урока:

1) повторить свойства прямоугольного параллелепипеда;
2) решить часть задач на свойства прямоугольного параллелепипеда.

Ход урока

I. Актуализация знаний

1) Один ученик у доски доказывает свойства прямоугольного параллелепипеда, другой теорему о диагонали прямоугольного параллелепипеда.
2) Устный счет:

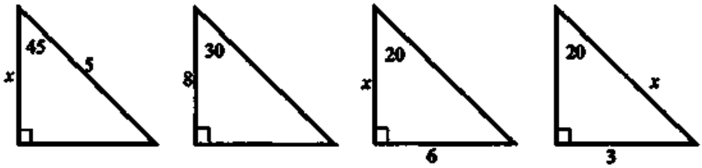


Рис. 1

3) Формирование навыков и умений у учащихся.

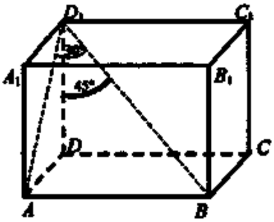


Рис. 2

№ 195. *Дано:* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед; $AC_1 = 12$ см; D_1; $AA_1D_1 = 30°$; $\angle BD_1D = 45°$ (рис. 2).

Найти: AB, AD, AA_1.

Решение:

1) $BD_1 = AC_1 = 12$ см;
2) $AB \perp ADD_1$, значит, AD_1 – проекция BD_1 на плоскость AA_1D_1, значит, $\angle AD_1B = 30°$;
3) Из ΔABD_1: $AB = \frac{1}{2}D_1B$; $AB = \frac{1}{2}\cdot 12 = 6$ см;
4) ΔDD_1B – прямоугольный равнобедренный; $\angle D_1DB = 90°$, так как $\angle DD_1B = 45° \Rightarrow DD_1 = DB = x$, по теореме Пифагора $x^2 + x^2 = 12^2$; $2x^2 = 144$; $x^2 = 72$; $x = \sqrt{72}$; $x = 6\sqrt{2}$ (см), то есть $DD_1 = DB = 6\sqrt{2}$ см. Из прямоугольного треугольника AOB найдем AD по теореме Пифагора ($\angle DAB = 90°$), $AD = \sqrt{DB^2 - AB^2}$ $AD = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 - 6^2} = \sqrt{72 - 36} = \sqrt{36} = 6$ см; $AA_1 = DD_1 = 6\sqrt{2}$ см.

(*Ответ*: 6 см, 6 см, $6\sqrt{2}$ см.)

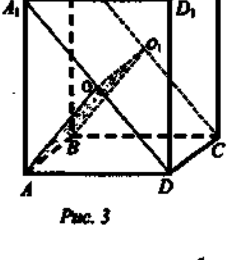


Рис. 3

№ 196б. *Дано:* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (рис. 3).

Построить: сечение плоскостью, проходящей через AB и $\perp CDA$.

Построение: проведем $AO \perp A_1D$, так как AA_1D_1D – квадрат $\Rightarrow AO_1 = \frac{1}{2}AD_1$ $BO_1 \parallel AO_1$. Соединим OO_1; ABO_1O – искомое сечение.

Вопросы: Какой фигурой является ABO_1O? Ответ объясните. Найдите его площадь, если ребро куба a.

Решение: $AO = \frac{1}{2}AD_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,a = \frac{\sqrt{2}a}{2}$; $S_{ABO_1O} = \frac{\sqrt{2}a}{2}\cdot a = \frac{\sqrt{2}a^2}{2}$.

Самостоятельная работа

I уровень

1) *Дано:* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед; $AB = 6$ см, $AD = 4$ см, $AA_1 = 12$ см (рис. 4).

Найти: AC_1.

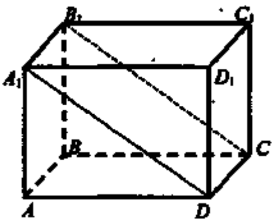


Рис. 4

Решение: $AC_1 = \sqrt{AB^2 + AA_1^2 + AD^2} =$

$= \sqrt{6^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{196} = 14$ (м). (*Ответ*: 14 м.)

2) *Дано:* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед; $AB = 4$ м, $AD = 3$, $S_{DCB_1A_1} = 20$ м^2.

Найти: $S_{бок}$.

Решение: $S_{DA_1B_1C} = A_1D \cdot DC$; $A_1D = \dfrac{S}{DC}$; $DC = AB = 4$ (м), $A_1D = \dfrac{20}{4} = 5$ (м),

по теореме Пифагора $AA_1 = \sqrt{A_1D^2 - AD^2}$; $AA_1 = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25-9} =$

$= \sqrt{16} = 4$ (см); $S_{б.п.} = P_{осн.} \cdot AA_1$, $P_{осн.} = (AD + DC) \cdot 2$, $P_{осн.} = (3 + 4) \cdot = 14$ см; $S_{б.п.} = 14 \cdot 4 = 56$ (см^2). (*Ответ*: 56 см^2.)

II уровень

Дан прямоугольный параллелепипед. Угол между диагональю основания и одной из его сторон равен β. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если диагональ основания равна *к*.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, $\angle BDC = \alpha$, $\angle B1DC = \beta$; диагональ $BD = k$ (рис. 5).

Найти: *Sбок*.

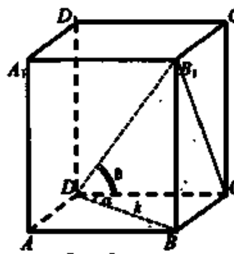


Рис. 5

Решение: Рассмотрим прямоугольный ΔBDC: $DC = k \cdot \cos\alpha$; $CB = k \cdot \sin\alpha$; $DC \perp BCC_1B_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow DC \perp B_1C$, так как $B_1C \in BCC_1B_1$.

Из прямоугольного ΔB_1CD: $DB_1 = \dfrac{DC}{\cos\beta} =$

$= \dfrac{k \cdot \cos\alpha}{\cos\beta}$;

$$BB_1 = \sqrt{DB_1^2 - DB^2} = \sqrt{\frac{R^2 \cdot \cos^2\alpha}{\cos^2\beta} - R^2} = \sqrt{\frac{R^2(\cos^2\alpha - \cos^2\beta}{\cos^2\beta}} =$$

$$= \frac{R}{\cos\beta} \cdot \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\beta}; \qquad S_{бок} = \frac{2k}{\cos\beta} \cdot \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\beta} \cdot k \cdot \sin\alpha + \frac{2k}{\cos\beta} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\beta} \cdot k \cdot \cos\alpha = \frac{2k}{\cos\beta} \cdot \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\beta}(\sin\alpha + \cos).$$

III уровень

Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с меньшей гранью угол β. Через большие стороны верхнего и нижнего основания проведено сечение, образующее с плоскостью основания угол. Зная, что периметр равен *P*, найдите измерения параллелепипеда.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед; $\angle A_1DC_1 = \beta$; AB_1C_1D – сечение параллелепипеда; $\angle C_1DC = \alpha$; $AB_1C_1D = P$ (рис. 6).

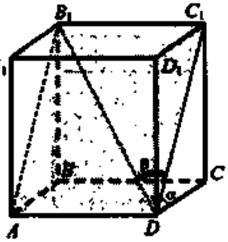


Рис. 6

Найти: AD, AB, AA_1.

Решение: $2(B_1C_1 + DC_1) = \frac{P}{2}(1)$;

$LB_1C_1D = 90°$ по теореме о 3-х перпендикулярах; $\operatorname{tg}\beta = \frac{C_1B_1}{DC_1}$; $C_1B_1 = DC_1 \cdot \operatorname{tg}\beta$, подставить в (1), получим $DC_1 \operatorname{tg}\beta + DC_1 = \frac{P}{2}$; вынесем DC_1: $DC_1 \cdot (\operatorname{tg}\beta + 1) = \frac{P}{2}$; $DC_1 = \frac{P}{2\cdot(\operatorname{tg}\beta+1)}$;

$B_1C_1 = DC_1 \cdot \operatorname{tg}\beta$; $B_1C_1 = \frac{P}{2\cdot(\operatorname{tg}\beta+1)} \cdot \operatorname{tg}\beta$ из ΔDCC_1:

$DC = DC_1 \cdot \cos\alpha$; $DC = \frac{P}{2\cdot(\operatorname{tg}\beta+1)} \cdot \cos\alpha$; $CC_1 = DC_1 \cdot \sin\alpha$; $CC_1 = \frac{P}{2\cdot(\operatorname{tg}\beta+1)} \cdot \sin\alpha_1$. (*Ответ:* $B_1C_1 = \frac{P}{2\cdot(\operatorname{tg}\beta+1)} \cdot \operatorname{tg}\beta$, $CC_1 = \frac{P}{2\cdot(\operatorname{tg}\beta+1)} \cdot \sin\alpha_1$

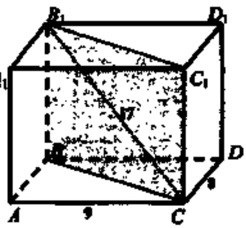


Рис. 7

$DC = \frac{P}{2\cdot(\operatorname{tg}\beta+1)} \cdot \cos\alpha$.)

V. Подведение итогов

Домашнее задание

А – № 192, 194, 196*а*.

В – 1) Стороны основания и диагональ прямоугольного параллелепипеда равны 8 дм, 9 дм. Чему равна площадь диагонального сечения?

2) Диагонали трех граней прямоугольного параллелепипеда, сходящихся в одной вершине, равны 8 м, 10 м и 12 м. Найдите линейные размеры этого параллелепипеда.

Урок 41. Перпендикулярность прямых и плоскостей (повторение)

Цели урока:
1) повторить некоторые вопросы теории путем опроса учащихся;
2) решить задачи на применение этих вопросов.

Ход урока

I. Актуализация опорных знаний

Фронтальный опрос

Трое учащихся на доске записывают решение домашних задач.

1. № 192. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб; B_1D – диагональ куба; $\angle BDB_1 = \alpha$ (рис. 1).

Найти: tgα.

Решение:

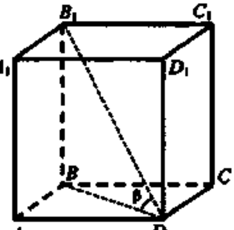


Рис. 1

1. Известно, что все ребра куба равны. Пусть $AB = AD = AA_1 = a$.
2. ΔABD – прямоугольный. $BD^2 = AB^2 + AD^2$ (теорема Пифагора); $BD^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$; $BD = a\sqrt{2}$.
3. BD – проекция B_1D на $ABCD \Rightarrow$ угол между этими прямыми есть α.
4. В ΔB_1BD; $tg\,\alpha = \dfrac{B_1B}{BD}$, $tg\alpha = \dfrac{\alpha}{a\sqrt{2}}$, $tg\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(*Ответ*: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.)

2. № 195. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед; BD_1 – диагональ параллелепипеда; $AC_1 = 12$ см; $\angle AD_1B = 30°$, $\angle DD_1B = 45°$ (рис. 2).

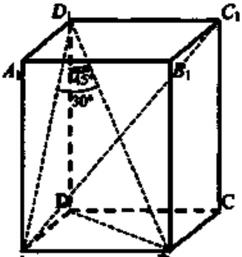


Рис. 2

Найти: AB, AD, DD_1.

Решение:

1. Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны; $BD_1 = AC_1 = 12$ см.
2. $AB \perp ADD_1$, поэтому AD_1 – проекция диагонали на плоскость AA_1D_1D и $\Rightarrow \angle AD_1B = 30°$.
3. Из ΔABD получаем: $AB = 6$ см (по свойству катета, лежащего против угла в 30°.
4. Из ΔDD_1B имеем: $BD = BD_1 \cdot \sin 45°$; $BD = 12 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$; $DD_1 = BD_1 \cos 45°$; $DD_1 = 12 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$, $DD_1 = 6\sqrt{2}$ см.
5. Из ΔADB получаем: $AD = \sqrt{BD^2 - AB^2}$; $AD = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 - 6} = \sqrt{72 - 36} = 6$, $AD = 6$ см.

(*Ответ*: 6 см, 6 см, $6\sqrt{2}$ см.)

3. Задача по планиметрии

Дано: ΔABD, $DM \perp AB$; $AB = 14$, $BD = 13$, $AD = 15$ (рис. 3).

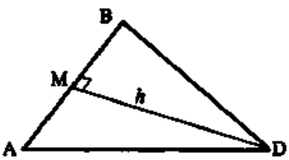


Рис. 3

Найти: h.

Решение:

1. Пусть $MB - x$, тогда $AM = AB - x$, то есть $AM = 14 - x$.

2. Из ΔMBD и ΔAMD (прямоугольные так как $MD \perp AB$); $h^2 = BD^2 - x^2 = 13^2 - x^2 = 169 - x^2$ (в ΔMBD); $h^2 = AD^2 - (14 - x)^2 = 15^2 - 14^2 + 28x -$

$-x^2 = 29 + 28x - x^2$ (в ΔAMD). Приравняем правые части $29 + 28x - x^2 = 169 - x^2$; $28x = 140$; $X = 5$; $MB = 5$.

3. Из ΔMBD, $h^2 = BD^2 - MB^2$; $h^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$; $h = 12$.

(*Ответ*: 12.)

Два ученика работают по карточкам.

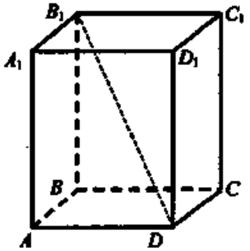


Рис. 4

1. Три измерения прямоугольного параллелепипеда равны 1 м, 2 м, 3 м. Найдите: а) сумму длин всех его ребер; б) сумму площадей всех его граней; в) длины его диагоналей.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед; $AB = 1$ м, $AD = 2$ м, $AA_1 = 3$ м (рис. 4).

Найти: а) сумму длин ребер; б) сумму площадей граней; в) длины диагоналей.

Решение:

а) В прямоугольном параллелепипеде 12 ребер; $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$; $AB = A_1B_1 = CD = C_1D_1$; $BC = B_1C_1 = AD = A_1D_1$. Это противоположные стороны прямоугольника. Сумма ребер $= (AA_1 + AB + AD) \cdot 4 = (1 + 2 + 3) \cdot 4 = 24$. Сумма ребер = 24 м.

б) 6 граней, причем противоположные равны; $(S_{ABCD} + S_{A_1ABB_1} + S_{AA_1D_1D}) \cdot 2 = (AB \cdot AD + AB \cdot AA_1 + AD \cdot AA_1) \cdot 2 = (1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3) \cdot 2 = 22$.

в) Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны; $B_1D^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$; $B_1D^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$; $B_1D = \sqrt{14}$ м.

(*Ответ*: 24 м, 22 м^2, $\sqrt{14}$ м.)

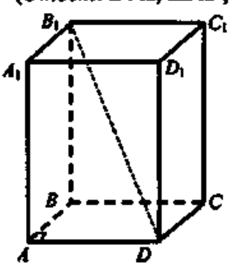


Рис. 5

2. Три ребра параллелепипеда, имеющие общую вершину равны 2 м, 3 м и 5 м, а одна из диагоналей равна 6 м. Является ли этот параллелепипед прямоугольным? (рис. 5).

Решение: Предположим, что параллелепипед прямоугольный, тогда в ΔABD: $BD^2 = AB^2 + AD^2$, так как ΔABD – прямоугольный и для него справедлива теорема Пифагора. $BD^2 = 2^2 + 3^2 = 13$, $BD = \sqrt{13}$ м. В ΔB_1BD, $BB_1 = AA_1 = 5$ м; $B_1D^2 = B_1B^2 + BD^2$; $B_1D^2 = 5^2 + (\sqrt{13})^2 = 38$, $B_1D = \sqrt{38}$ м, а по условию $B_1D = 6$ м, следовательно, предположение неверно и параллелепипед не является прямоугольным. (*Ответ*: не является.)

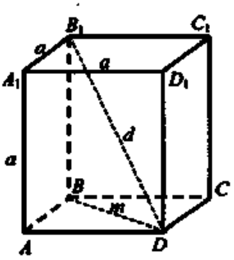


Рис. 6

II. Формирование навыков и умений учащихся

№ 189. *Дано:* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (рис. 6).

Найти: расстояние от вершины куба до плоскости любой грани, в которой не лежит эта вершина, если:

1) m – диагональ грани;

2) d – диагональ куба.

Пусть a – ребро куба (а ребра куба равны), тогда расстояние от вершины A_1 (например) до плоскости любой грани будет a (так как ребра куба перпендикулярны).

1. ΔABC – прямоугольный; $m^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, $m = a\sqrt{2}$; $a = \frac{m}{\sqrt{2}} =$

$= \frac{m\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}m$;

2. $d^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$; $d = a\sqrt{3}$, $a = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}d$.

(*Ответ*: $\frac{\sqrt{2}}{2}m$, $\frac{\sqrt{3}}{3}d$.)

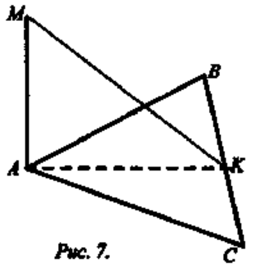


Рис. 7.

№ 206. Дано: ΔABC, $AB = 17$ см, $BC = 8$ см; $AC = 15$ см, $AM \perp ABC$, $AM = 20$ см (рис. 7).

Найти: расстояние от точки M до плоскости ABC.

Решение:

1. Проведем $AK \perp BC$, по теореме о 3-х перпендикулярах $MA \perp BC \Rightarrow MK$ – искомый отрезок.
2. Применим формулу Герона $S_{FBC} = \sqrt{P(P-AB)(P-BC)(P-AC)}$. С другой стороны, $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot \cdot AK = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot AK = 4AK$;

   $P = \frac{15+17+8}{2} = 20$; $S_{ABC} = \sqrt{20(20-17)(20-8)(20-15)} =$

   $= \sqrt{20 \cdot 3 \cdot 12 \cdot 5} = 60$; $4AK = 60$, $AK = 15$ см.
3. ΔMKA, $MK = \sqrt{MA^2 + AK^2}$; $MK = \sqrt{20^2 + 15^2} = \sqrt{625} = 25$; $MK = 25$ см.

(*Ответ*: 25 см.)

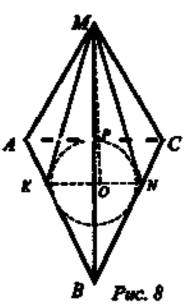


Рис. 8

№ 207. Дано: $MABC$ – тетраэдр; $AB = C$, $BC = a$, $AC = b$, $MO \perp ABC$; $MK = MN = MP = m$ (рис. 8).

Найти: MO.

Решение:

1. O – центр вписанной в ΔABC окружности.
2. Рассмотрим ΔMKO, ΔMNO, ΔMPO; $\Delta MKO = \Delta MNO = \Delta MPO$ (по катету и гипотенузе).
3. Вычислим $S\Delta$ и $P\Delta$.
4. Найдем радиус вписанной окружности.
5. $MO = \sqrt{MK^2 - r^2}$ (по теореме Пифагора).

III. Подведение итогов

Домашнее задание

№ 188, 203, 207.

Урок 42. Решение задач

Цели урока:

1) подготовить учащихся к зачету;
2) решить задачи, близкие по содержанию задачам, включенным в зачет.

Ход урока

I. Проверка домашнего задания

Двое учеников решают у доски домашние задачи.

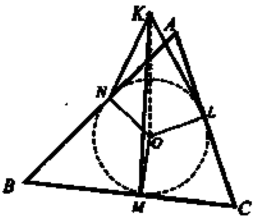


Рис. 1

№ 203. Дано: O – центр окружности, вписанной в ΔABC; $OK \perp ABC$, $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см, $OK = 4$ см (рис. 1).

Найти: расстояние от точки K до сторон ΔABC.

Решение:

1. Окружность касается сторон ΔABC в точках N, L, M. $NO = LO = MO = r$, $OK \perp ABC$ (по условию); $ON \perp AB$; $KN \perp AB$; $OL \perp AC \Rightarrow KL \perp AC$; $OM \perp BC$; $KM \perp BC$ по теореме о 3-х перпендикулярах $\Rightarrow NK, LK, MK$ – искомые отрезки.
2. Проекции этих отрезков равны радиусу вписанной окружности $\Rightarrow$ равны и сами отрезки $KM = KL = KN$.
3. $r=\dfrac{S_\Delta}{P}$, $P=\dfrac{P}{2}=\dfrac{10\cdot 2+12}{2}=16$. $P=16$ см. $S_\Delta=\sqrt{P(P-AB)(P-BC)(P-AC)}$.

   $S_\Delta=\sqrt{16(16-10)(16-10)(16-12)}=\sqrt{16\cdot 6\cdot 6\cdot 4}=48$, $S_\Delta=48$ см^2.

   $r=\dfrac{48}{16}=3$, $r=3$ см.
4. В ΔKOM – прямоугольном – $KM^2 = KO^2 + MO^2$; $KM^2=\sqrt{16+9}=5$, $KM = 5$ см.

(*Ответ:* 5 см.)

№ 207. Дано: ΔABC, $AC = 10$ см, $AB = BC = 13$ см; $KM = MN = MP = 8\dfrac{2}{3}$ см.

Найти: MO.

Решение:

1. O – центр вписанной окружности.
2. $\Delta MKO = \Delta MNO = \Delta MPO$ (по катету и гипотенузе).
3. $KO = PO = NO = r$. $S_\Delta=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$. $P=\dfrac{13\cdot 2+10}{2}=18$,

   $P = 18$ см. $S_{ABC}=\sqrt{18(18-13)(18-13)(18-10)}=\sqrt{144\cdot 25}=12\cdot 5=60$,

   $S_\Delta=60$ см^2. $r=\dfrac{S}{P}$, $r=\dfrac{60}{18}=\dfrac{10}{3}$; $MO^2=MK^2-r^2$; $MO^2=\left(\dfrac{26}{3}\right)^2-\left(\dfrac{10}{3}\right)^2=$

$=\dfrac{676-100}{9}=\dfrac{576}{9}$; $MO=\dfrac{24}{3}=8$, $MO=8$ см.

(*Ответ*: 8 см.)

II. Решение задач

Третий ученик решает задачу *№ 216.*

Дано: $A \subset MN$, $B \subset MN$; MN – ребро двугранного угла; $\angle CAK = 120°$; $AC \perp MN$, $BD \perp MN$; $AB = AC = BD = a$ (рис. 2).

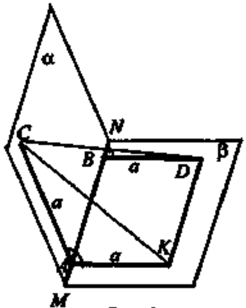


Рис. 2

Найти: CD.

Решение:

1. Проведем $DK \parallel AB$ $AK \parallel BD$, тогда $AK \perp AB$, $AK = KD = a$. Так как $AC \perp AB$; $AK \perp AB$, то $\angle CAK$ – линейный угол двугранного угла.
2. Из ΔCAK по теореме косинусов получим; $CK^2 = AC^2 + AK^2 - 2AC \cdot AK \cos 120°$; $CK^2 = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cdot \cos 120° = 2a^2 - 2a^2(-\dfrac{1}{2}) = 3a^2$.
3. Так как $AB \perp CAK$; $DK \parallel AB$, то $DK \perp CAK \Rightarrow DK \perp CK$, поэтому ΔCKD – прямоугольный. Из ΔCKD получим $CD^2 = CK^2 + KD^2$; $CD^2 = 3a^2 + a^2 = 4a^2$; $CD = 2a$.

(*Ответ*: $2a$.)

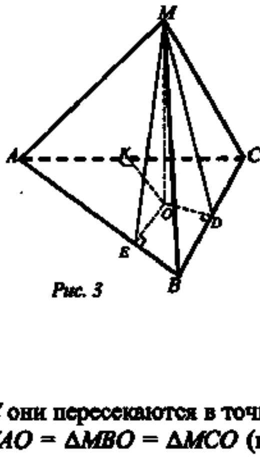


Рис. 3

№ 204. *Дано:* ΔABC – правильный; $OM \perp ABC$, $OM = a$; $O \subset (OM)$, $\angle MCO = \varphi$ (рис. 3).

Найти: а) MA, MB, MC; расстояние от точки M до прямых AB, BC, CA; б) l; в) $S_{\Delta ABC}$.

Решение:

а) 1. Проведем высоты AD, BK, CE. В ΔABC они пересекаются в точке O (центр ΔABC); $OA = OB = OC$; $\Delta MAO = \Delta MBO = \Delta MCO$ (по двум катетам) $\Rightarrow MA = MB = MC$.

2. Из ΔMCO имеем: $\dfrac{MO}{MC} = \sin\varphi$, $MC = \dfrac{a}{\sin\varphi}$; $\dfrac{MO}{OC} = \operatorname{tg}\varphi$, $OC = \dfrac{a}{\operatorname{tg}\varphi}$.

3. $OD = OK = OE = \dfrac{OC}{2} \Rightarrow OD = \dfrac{a}{2\operatorname{tg}\varphi}$; $\Delta MOD = \Delta MOK = \Delta MOE$ (по 2-м катетам) $\Rightarrow MK = ME = MD$.

4. Так как OD – проекция MD на плоскость ABC и $OD \perp BC$, то $MD \perp BC$ (теорема о 3-х перпендикулярах). Из ΔMDO:

$$MD^2 = MO^2 + OD^2;\ MD^2 = a^2 + \frac{a^2}{4\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{4a^2\operatorname{tg}^2\varphi + a^2}{4\operatorname{tg}^2\varphi};$$

$$MD = \sqrt{\frac{a^2(4\operatorname{tg}^2\varphi + 1)}{4\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{a}{2\operatorname{tg}\varphi} \cdot \sqrt{1 + 4\operatorname{tg}^2\varphi};$$

б) $l = 2\pi R$, $R = a$, $l = \dfrac{2\pi a}{\operatorname{tg}\varphi}$;

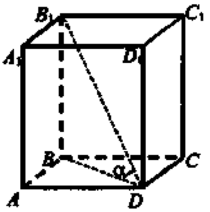
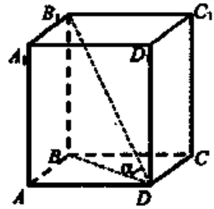
в) $S\Delta = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4}$, так как $AB = OC\sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\varphi}$, то $S_{ABC} = \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4\operatorname{tg}^2\varphi}$.

(*Ответ*: а) $\dfrac{a}{\sin\varphi}$, $\dfrac{a}{2\operatorname{tg}\varphi}\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\varphi}$; б) $\dfrac{2\pi a}{\operatorname{tg}\varphi}$; в) $\dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4\operatorname{tg}^2\varphi}$.)

Провести разноуровневую самостоятельную работу на 6 вариантов.

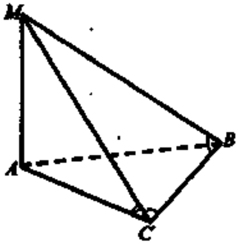
Самостоятельная работа

I уровень

Вариант I	***Вариант II***
В прямоугольном параллелепипеде измерения равны 6, 8, 10. Найти диагональ параллелепипеда и угол между диагональю параллелепипеда и плоскостью его основания.  *Дано:* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, $AB = 6$, $AD = 8$, $AA_1 = 10$. *Найти:* 1. B_1D; 2. $\angle B_1DB$. *Решение:* 1. $B_1D^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$; $B_1D^2 = 6^2 + 8^2 + 10^2 = 200$; $B_1D = 10\sqrt{2}$; 2. $BD^2 = AB^2 + AD^2$; $BD^2 = 6^2 + 8^2 = 100$; $BD = 10$; $\angle B_1DB = \alpha$, $\cos\alpha = \dfrac{BD}{B_1D}$; $\cos\alpha = \dfrac{10}{10\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\alpha = 45°$. (*Ответ*: $10\sqrt{2}$; $45°$.)	В прямоугольном параллелепипеде измерения равны 5, 7, $\sqrt{47}$. Найти диагональ параллелепипеда и синус угла между диагональю параллелепипеда и плоскостью его основания  *Дано:* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед; $AB = 5$, $AD = \sqrt{47}$; $AA_1 = 7$. *Найти:* 1. B_1D; $\sin\alpha$. *Решение:* 1. $B_1D^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$; $B_1D^2 = 5^2 + (\sqrt{47})^2 + 7^2 = 25 + 47 + 49 = 121$; $B_1D = 11$; 2. $2\sin\alpha = \dfrac{B_1B}{B_1D}$; $B_1B = A_1A = 7$; $\sin\alpha = \dfrac{7}{11}$. (*Ответ*: 11; $\dfrac{7}{11}$.)

II уровень

Вариант III	***Вариант IV***
Из вершины A прямоугольного ΔABC ($\angle C = 90°$, $\angle B = 60°$) восстановлен перпендикуляр к плоскости ABC и на нем взят отрезок $AM = h$. Точка M соединена с B и C. Найдите $S_{\Delta MBC}$, если двугранный $\angle ABCM = 30°$.	Точка M находится на расстоянии h от плоскости α. Проведены 2 наклонные MP и MQ (где P и Q – основания наклонных), соответственно под углами 45° и 60°. Найдите PQ, если $\angle POQ = 150°$, где O – основание перпендикуляра MO, $MO \perp \alpha$.



Дано: ΔABC – прямоугольный, $\angle C = 90°$, $\angle B = 60°$; $AM \perp ABC$, $AM = h$; $\angle ABCM = 30°$.

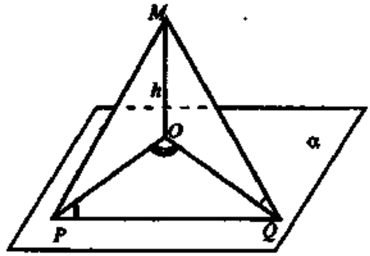
Найти: $S_{\Delta MBC}$

Решение:

1. $MA \perp ABC$; $AC \perp BC$, то по теореме о 3-х перпендикулярах $MC \perp BC \Rightarrow$ двугранным углом между плоскостями BCM и ABC будет $\angle ACM$.
2. ΔAMC – прямоугольный; $MC = \dfrac{AM}{\sin 30°}$; $MC = 2h$;

   $AC = \dfrac{AM}{\text{tg}30°} \Rightarrow AC = h\sqrt{3}$.
3. ΔABC – прямоугольный; $BC = \dfrac{AC}{\text{ctg}60°}$; $BC = h$.
4. $S_{\Delta MBC} = \dfrac{1}{2} MC \cdot BC = \dfrac{1}{2} 2h \cdot h = h^2$

(*Ответ*: h^2.)



Дано: MP и MQ – наклонные; $MO = h$; $\angle MQO = 45°$; $\angle MPO = 60°$; $\angle POQ = 150°$; $M \not\subset \alpha$.

Найти: PQ.

Решение:

1. ΔPOM и ΔQOM – прямоугольные, так как $MO \perp \alpha$.
2. $OP = OM \cdot \text{ctg}60°$; $QO = OM \cdot \text{ctg}45°$;

   $OP = \dfrac{h}{\sqrt{3}}$, $QO = h$;
3. ΔPOQ: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\varphi$; $PQ^2 = OP^2 + QO^2 - 2OP \cdot QO \cdot \cos 150°$;
4. $PQ^2 = \dfrac{h^2}{3} + h^2 - 2\dfrac{h}{\sqrt{3}} \cdot h\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

   $PQ^2 = \dfrac{7h^2}{3}$; $PQ = h\sqrt{\dfrac{7}{3}}$.

(*Ответ*: $h\sqrt{\dfrac{7}{3}}$.)

III уровень

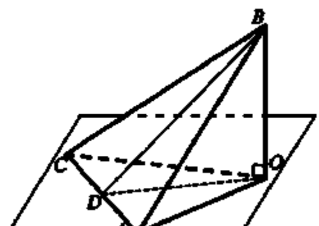
Вариант V

Треугольник ABC равносторонний, сторона AB наклонена под $\angle 45°$ к плоскости α, а сторона AC лежит в плоскости α.

Под каким углом наклонена плоскость ΔABC к плоскости α?

Дано: ΔABC – равносторонний; $\angle BAO = 45°$; $AC \subset \alpha$.

Найти: $\angle BDO$.

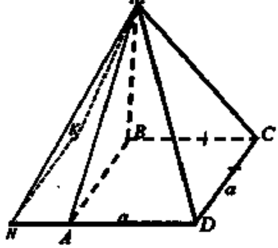


Вариант VI

Плоскость квадрата $ABCD$ со стороной a перпендикулярна плоскости равнобедренного ΔBCM с углом B 120°. Найдите $S_{\Delta ADM}$

Дано: $ABCD$ – квадрат; $AB = a$; ΔBCM – тупоугольный равнобедренный; $\angle B = 120°$; $ABCD \perp \Delta BCM$.

Найти: $S_{\Delta ADM}$



Решение: 1. Проведем $BD \perp AC$ и $BO \perp \alpha$. По теореме о 3-х перпендикулярах $OD \perp AC$ $BD \perp AC \Rightarrow AC \perp BOD$; $\angle BDO$ – линейный угол двугранного угла $BACO$, угол между плоскостью α и плоскостью ΔABC. 2. ΔABO – прямоугольный ($BO \perp \alpha$), следовательно $BO \perp AO$. По определению перпендикуляра к плоскости; $BO = AO = a$. 3. $AB = a\sqrt{2}$ (т. Пифагора). 4. ΔABC – прямоугольный; $BD = AB \sin 60^\circ = a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. 5. ΔDBO – прямоугольный; $\sin D = \frac{BO}{BD} = \frac{a}{a\frac{6}{\sqrt{2}}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$; $\angle D = \arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}$. (*Ответ:* $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}$.)	*Решение:* Угол между двумя плоскостями ABC и MBC – $\angle MKN$; $\angle MKN$ – прямой (по условию) $\Rightarrow \Delta MKN$ – прямоугольный; MK – высота ΔMBC; $MK = MB \sin 60^\circ$; $MK = \frac{\sqrt{3}}{2}a$; $NK = AB = a$ (по построению); MN – высота ΔAMD, так как $MN \perp ND$ по теореме о 3-х перпендикулярах; $MN = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 + a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{7}$; $S_{\Delta AMD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{7} \cdot a = \frac{a^2}{4}\sqrt{7}$. (*Ответ:* $\frac{a^2}{4}\sqrt{7}$ (ед^2).)

III. Подведение итогов

Разобрать задачи, предложенные в самостоятельной работе.

Домашнее задание

Подготовиться к зачету.

Урок 43. Контрольная работа по теме «Перпендикулярность прямых и плоскости»

Цель урока:

– проверить знания учащихся по данной теме, выявить проблемы в знаниях.

Ход урока

Контрольная работа проводится по вариантам (по карточкам).

I уровень

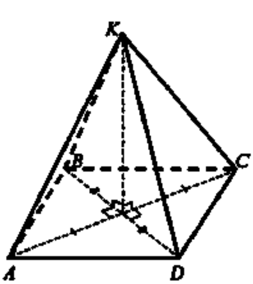


Рис. 1

Вариант I

1. Длина стороны ромба $ABCD$ равна 5 см, длина диагонали BD равна 6 см. Через точку O пересечения диагоналей ромба проведена прямая OK, перпендикулярная его плоскости. Найдите расстояние от точки K до вершин ромба, если $OK = 8$ см.

Дано: $ABCD$ – ромб. $AB = 5$ см. $BD = 6$ см. $OK \perp (ABC)$, $OK = 8$ см (рис. 1).

Найти: KA, KB, KC, KD.

Решение: $KO \perp (ABC) \Rightarrow KO \perp AC$, $KO \perp BD$. $AC \cap BD = O \Rightarrow BO = OD$, $AO = OC$ – свойство диагоналей ромба. KB_1, KC_1, KA_1, KD – наклонные к плоскости $(ABCD)$ из одной точки. $KA = KC$, $KB = KD$.

1) Из ΔKOB: $\angle O = 90°$; $KO = 8$ см, $BO = OD = 3$ см. По теореме Пифагора $KB = \sqrt{BO^2 + OK^2}$; $KB = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73}$; $KB = KD = \sqrt{73}$ см.
2) Из ΔBOA: $\angle O = 90°$; $OB = 3$ см, $AB = 5$ см. По теореме Пифагора $AO^2 = AB^2 - BO^2$; $AO^2 = 5^2 - 3^2 = 4^2$. Из ΔKOA: $\angle O = 90°$. По теореме Пифагора $AK^2 = KO^2 + AO^2$; $AK^2 = 8^2 + 4^2 = 80$; $AK = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ (см); $AK = KC = 4\sqrt{5}$ см.

(*Ответ*: $KB = KD = \sqrt{73}$ см, $AK = KC = 4\sqrt{5}$ см.)

2. Длина катета прямоугольного равнобедренного треугольника равна 4 см. Плоскость α, проходящая через катет, образует с плоскостью треугольника угол, величина которого равна 30°. Найдите длину проекции гипотенузы на плоскость α.

Дано: ΔACB, $\angle C = 90°$; $AC = CB = 4$ см; $CB \subset \alpha$, $\angle ACK = 30°$ (рис. 2).

Найти: KB.

Решение: $KCBA$ – двугранный угол. CB – ребро двугранного угла. $AC \perp CB$, $KC \perp CB$, $\angle ACK$ – линейный угол двугранного угла. По условию $\angle ACK = 30°$. $AK \perp \alpha$, $AK \perp CK$. AB – наклонная к

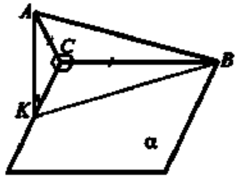


Рис. 2

клонная к плоскости α из точки A. KB – проекция наклонной. Из ΔKAC: $\angle K = 90°$; $\angle C = 30°$, $\Rightarrow \angle A = 60°$. $AC = 4$ см (по условию), $AK = \frac{1}{2}AC = 2$ см (как катет, лежащий против угла в 30°). $KC^2 = AC^2 - AK^2$ – по теореме Пифагора. $KC^2 = 4^2 - 2^2 = 12$. Из ΔKCB: $\angle C = 90°$; $KC^2 = 12$, $CB = 4$ см. По теореме Пифагора $KB = \sqrt{KC^2 + CB^2}$; $KB = \sqrt{12 + 4^2} = \sqrt{12 + 4^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$. (*Ответ*: $KB = 2\sqrt{7}$ см.)

Вариант II

№ 1

Длины сторон прямоугольника равны 8 и 6 см. Через точку O пересечения его диагоналей проведена прямая OK, перпендикулярная его плоскости. Найдите расстояние от точки K до вершин прямоугольника, если $OK = 12$ см.

Дано: $ABCD$ – прямоугольник; $AB = DC = 6$ см; $AD = BC = 8$ см. $AC \cap BD = 0$; $OK \perp ABCD$; $OK = 12$ см (рис. 3).

Найти: KA, KB, KC, KD.

Рис. 3

Решение: Из точки K к плоскости проведены наклонные KA_1 KB, KC, KD. Так как

$KO \perp (ABC)$, то OA, OB, OC, OD – проекции наклонных. $AC = BC$. $KO \perp (ABC)$ – диагонали прямоугольника $\Rightarrow AO = OC = OB = OD$. Из ΔBAD: $\angle A = 90°$, $AB = 6$ см, $AD = 8$ см. По теореме Пифагора $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2}$; $BD = \sqrt{6^2 - 8^2} = 10$ (см) $BO = \frac{1}{2}BD = 5$ (см). Из ΔKOB: $\angle O = 90°$, $OB = 5$ см, $KO = 12$ см. $KB = \sqrt{BO^2 + OK^2}$; $KB = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$. (*Ответ*: $KA = KB = KC = KP = 13$ см.)

Вариант II

№ 2

Длины сторон треугольника ABC соответственно равны: $BC = 15$ см, $AB = 13$ см, $AC = 4$ см. Через сторону AC проведена плоскость α, составляющая с плоскостью данного треугольника угол $30°$. Найдите расстояние от вершины B до плоскости α.

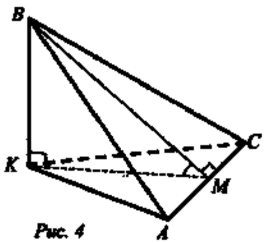


Рис. 4

Дано: ΔABC. $BC = 15$ см, $AB = 13$ см, $AC = 4$ см. $AC \subset \alpha$. $\angle BACK = 30°$. $BK \perp \alpha$ (рис. 4).

Найти: BK.

Решение: $BACK$ – двугранный угол. AC – ребро двугранного угла. $BM \subset (ABC)$; $BM \perp AC$, $M \in AC$. $KM \subset (AKC)$; $KM \perp AC$. $\angle BMK$ – линейный угол двугранного угла. $\angle BMK = 30°$.

$S_{ABC} = \sqrt{P(P - AB)(P - AC)(P - BC)}$;

$P = \frac{AB + BC + CA}{2}$; $P = \frac{15 + 13 + 4}{2} = 16$. $S_{ABC} = \sqrt{16(16 - 15)(16 - 13)(16 - 4)} = \sqrt{16 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 12} = 24$. $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BM$; $BM = \frac{2S_{ABC}}{AC}$; $BM = \frac{2 \cdot 24}{4} = 12$ (см).

Из ΔBKM: $\angle K = 90°$; $\angle M = 30°$. Катет, лежащий против угла $30°$, равен $\frac{1}{2}$ гипотенузы, то есть $BK = \frac{1}{2}BM = 6$. (*Ответ*: 6 см.)

II уровень

Вариант I

1. Диагональ куба равна 6 см.

Найдите: а) ребро куба; б) косинус угла между диагональю куба и плоскостью одной из его граней.

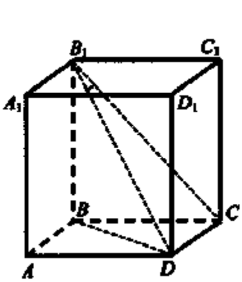


Рис. 5

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. $DB = 6$ см (рис. 5).

Найти: а) DC – ? б) $\cos\angle CB_1D$ – ?

Решение:

а) Мы знаем теорему $d^2 = a^2 + в^2 + c^2$. Так как куб – частный случай параллелепипеда, его ребра равны, то $d^2 = 3a^2$, где a – ребро куба. $6^2 = 3a^2$; $a^2 = 12$; $a = 2\sqrt{3}$. Итак, $DC = 2\sqrt{3}$ см.

б) Углом между DB_1 и плоскостью (BB_1C_1), является $\angle DB_1C$, так как $DC \perp (BB_1C_1)$, и B_1C – проекция DB_1 на плоскость (BB_1C_1). В ΔDCB_1: $\angle C = 90^\circ$; $\cos \angle CB_1D = \dfrac{B_1C}{DB_1}$; B_1C – диагональ квадрата BB_1C_1C со стороной $2\sqrt{3}$ см $\Rightarrow B_1C = a\sqrt{2} = 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{6}$ (см); $\cos\angle CB_1D = = \dfrac{2\sqrt{6}}{6} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

(*Ответ*: а) $DC = 2\sqrt{3}$ см; б) $\cos \angle CB_1D = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.)

2. Сторона AB ромба $ABCD$ равна a, один из углов ромба равен 60°. Через сторону AB проведена плоскость α на расстоянии $\dfrac{a}{2}$ от точки D.

а) *Найдите* расстояние от точки C до плоскости α.

б) *Покажите* на рисунке линейный угол двугранного угла $DABM$, $M \in \alpha$.

в) *Найдите* синус угла между плоскостью ромба и плоскостью α.

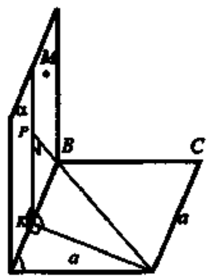


Рис. 6

Дано: $ABCD$ – ромб; $AB = a$, $M \in \alpha$; $\angle BAD = 60^\circ$; $DP \perp \alpha$; $DP = \dfrac{a}{2}$; $AB \subset \alpha$ (рис. 6).

Найти: а) расстояние от C до α; б) линейный угол двугранного угла $DABM$; в) $\sin\angle PKD$.

Решение:

а) $C \in DC$, $D \in DC$; $DC \parallel AB$, $AB \subset \alpha \Rightarrow DC \parallel \alpha$. Это значит, все точки данной прямой удалены одинаково от плоскости α, то есть если расстояние от D равно $\dfrac{a}{2}$, то и расстояние от C тоже равно $\dfrac{a}{2}$.

б) По определению, двугранные углы измеряются линейными углами. Все линейные углы одного двугранного угла равны. Поэтому достаточно построить любой угол двугранного угла $DABM$. $DK \perp AB$, $DK \subset (ABC)$, AB – ребро двугранного угла. В плоскости α $KP \perp AB$. $\angle PKD$ – линейный угол данного двугранного угла.

в) Из ΔKPD: $\angle P = 90^\circ$. $\sin\angle PKD = \dfrac{PD}{KD}$. Из $\angle AKD$: $\angle K = 90^\circ$; $\angle A = 60^\circ \Rightarrow \Rightarrow \angle D = 30^\circ$; $AD = a$; $AK = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{a}{2}$; $KD^2 = AD^2 - AK^2$; $KD^2 = a^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{3a^2}{4}$ (по теореме Пифагора из ΔAKD); $KD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. $\sin\angle PKD =$

$$= \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(*Ответ*: а) $\frac{a}{2}$; в) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.)

Вариант II

1. Основанием прямоугольного параллелепипеда служит квадрат, диагональ параллелепипеда равна $2\sqrt{6}$ см, а его измерения относятся как 1 : 1 : 2. Найдите: а) измерения параллелепипеда; б) синус угла между диагональю параллелепипеда и плоскостью его основания.

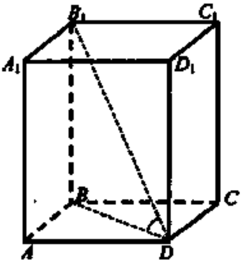


Рис. 7

Дано: AC_1 – прямоугольный параллелепипед. $ABCD$ – квадрат, B_1D = $= 2\sqrt{6}$ см; $AD : DC : DD_1 = 1 : 1 : 2$. (рис. 7).

Найти: а) AD, DC, DD_1; б) $\sin\angle BDB_1$.

Решение:

а) По теореме о свойстве диагонали параллелепипеда имеем: $AD^2 + DC^2 + DD_1^2 = B_1D^2$. Пусть $AD = x$ см, тогда $DC = x$ см, $DD_1 = 2x$ см; $x^2 + x^2 + 4x^2 = B_1D^2$; $6x^2 = (2\sqrt{6})^2$; $6x^2 = 24$; $x^2 = 4$; $x = 2$; $AD = 2$ см; DC = 2 см; $DD_1 = 4$ см.

б) $BB_1 \perp (ABC)$. Из ΔB_1BD: $\angle B = 90°$. $\sin\angle BDB_1 = \frac{BB_1}{B_1D}$; $BB_1 = 4$ см;

$$B_1D = 2\sqrt{6} \text{ см}; \sin\angle BDB_1 = \frac{4}{2\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

(*Ответ*: а) 2; 2; 4; б) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.)

2. Сторона квадрата $ABCD$ равна a. Через сторону AD проведена плоскость α на расстоянии $\frac{a}{2}$ от точки B.

а) Найдите расстояние от точки C до плоскости α.

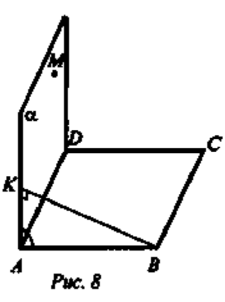


Рис. 8

б) Покажите на рисунке линейный угол двугранного угла $BADM$, $M \in \alpha$.

в) Найдите синус угла между плоскостью квадрата и плоскостью α.

Дано: $ABCD$ – квадрат. $AD = a$, $AD \subset \alpha$, $M \in \alpha$. $BK \perp \alpha$; $BK = \frac{a}{2}$ (рис. 8).

Найти: а) расстояние от C до α; б) показать линейный угол двугранного угла $BADM$; в) $\sin\angle BAK$.

Решение:

а) Так как точки B и C лежат на одной пря- мой $BC \parallel AD$, а $AD \subset \alpha$, то $BC \parallel \alpha$ и расстояние от точки B и C до плоскости α одинаковое, то есть $\frac{a}{2}$.

б) Любой двугранный угол измеряется линейным углом. Все они равные по величине для данного двугранного угла. Поэтому достаточно построить один угол в любом месте. AD – ребро двугранного угла. $AB \perp AD$, $AB \subset (ABC)$. В плоскости α из точки A проводим перпендикуляр к AD. $AK \perp AD$. $\angle KAB$ – линейный угол двугранного угла $BADM$;

в) Из ΔAKB: $\angle K = 90°$; $AB = a$; $KB = \frac{a}{2}$; так как катет равен половине гипотенузы, то угол $KAB = 30°$, то есть $\sin\angle BAK = \frac{KB}{AB}$; $\sin\angle BAK = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$.

(*Ответ*: а) $\frac{a}{2}$; в) $\frac{1}{2}$.)

Урок 44. Зачет № 2

Цели урока:

1) способствовать усвоению учащимися перпендикулярности прямых и плоскостей;
2) теоремы о трех перпендикулярах в ходе решения задач;
3) развивать логическое мышление учащихся.

Ход урока

1. Организационный момент

2. Работа по карточкам

Карточка 1

1. Докажите теоремы, устанавливающие связь между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости.
2. Решите задачу № 143 или № 213.

Карточка 2

1. Сформулируйте определение перпендикулярности прямой и плоскости. Докажите теорему, выражающую признак перпендикулярности прямой и плоскости.
2. Решите задачу № 131 или № 216.

Карточка 3

1. Докажите теорему о трех перпендикулярах.
2. Решите задачу № 150 или № 212.

Карточка 4

1. Сформулируйте определение угла между прямой и плоскостью. Расскажите о свойстве угла между прямой и плоскостью.
2. Решите задачу № 157 или № 206.

Карточка 5

1. Сформулируйте определение перпендикулярности двух плоскостей. Докажите теорему, выражающую признак перпендикулярности двух плоскостей.
2. Решите задачу № 171 или № 202.

Карточка 6

1. Докажите теорему о диагонали прямоугольного параллелепипеда.
2. Решите задачу № 195 или № 197.

Домашнее задание

Подготовиться к контрольной работе, просмотреть ранее решенные задачи.

Решение задач к зачету № 2 по теме «Перпендикулярность прямых и плоскостей»

Карточка № 1

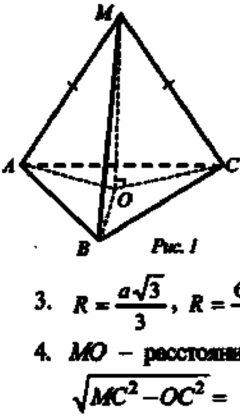


Рис. 1

Задача № 143

Дано: ΔABC – правильный; $AB = 6$ см; $M \notin (ABC)$; $AM = BM = CM = 4$ см (рис. 1).

Найти: расстояние от M до (ABC).

Решение:

1. Проведем $MO \perp (ABC)$.
2. $\Delta AOM = \Delta BOM = \Delta COM$ (как прямоугольные по гипотенузе и катету) $\Rightarrow AO = = BO = CO$, то есть O – центр описанной около ΔABC окружности.
3. $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $R = \dfrac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ см.
4. MO – расстояние от M до (ABC) и ΔMOC прямоугольный. $MO = \sqrt{MC^2 - OC^2} = = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2$ см.

(*Ответ*: 2 см.)

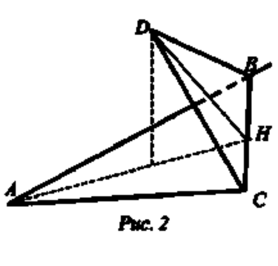


Рис. 2

Задача № 213

Дано: ΔABC и DBC – прямоугольные; D проектируется в центр ΔABC (рис. 2).

Вычислить угол между плоскостями ΔABC и ΔDBC.

Решение: Пусть точка D_1 проекция точки D на плоскость ABC. Тогда точка D_1 является точкой пересечения медиан ΔABC

(центр ΔABC). AH – медиана, H – середина BC, тогда $\frac{AD_1}{D_1H}=\frac{2}{1}$, откуда $\frac{D_1H}{AH}=\frac{1}{3}$. Причем $AH \perp BC$ и $DH \perp BC$ (по теореме о 3-х перпендикулярах), значит, $\angle AHD$ – это угол между плоскостями треугольников. $DH = AH$ (так как $\Delta ABC = \Delta DBC$), значит, $\cos\angle D_1HD=\frac{D_1H}{DH}=\frac{1}{3}AH : AH=\frac{1}{3}$.

Итак, $\cos\angle D_1HD=\frac{1}{3}$. (*Ответ*: $\cos\angle D_1HD=\frac{1}{3}$.)

Карточка № 2

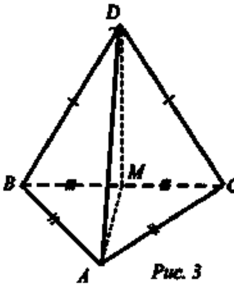


Рис. 3

2. Задача № 131

Дано: $ABCD$ – тетраэдр, M – середина BC, $AB = AC$; $DB = DC$ (рис. 3).

Доказать: $BC \perp (ADM)$.

Доказательство:

1. Так как $AB = AC$, то ΔABC равнобедренный. AM его медиана, следовательно, AM его высота, то есть $AM \perp BC$.
2. ΔBDC – равнобедренный, DM – медиана, а следовательно, высота. Таким образом, $BC \perp DM$.
3. Получим $BC \perp AM$ $BC \perp DM \Rightarrow BC \perp (ADM)$. Что требовалось доказать.

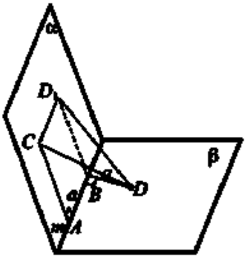


Рис. 4

Задача № 216

Дано: двугранный угол; m – ребро двугранного угла; $A \in m$; $B \in m$; $\angle D_1BD = 120°$; $AC \perp m$; $BD \perp m$; $AB = AC = BD = a$ (рис. 4).

Найти: CD.

Решение:

1. Проведем $BD_1 \parallel AC$ так чтобы ABD_1C был квадратом, то есть $BD_1 = a$. Тогда $\angle D_1BD = 120°$.
2. По условию $BD \perp m$, $AC \perp m$ и $AC \parallel BD_1$, значит, $BD_1 \perp m$, по теореме о трех перпендикулярах $CD_1 \perp DD_1$ и $\angle CD_1D = 90°$. ΔCD_1D – прямоугольный.
3. ΔD_1BD: в нем $D_1B = BD = a$; $\angle D_1BD = 120°$. По теореме косинусов
$D_1D^2 = BD^2 + D_1B^2 - 2 \cdot DB \cdot D_1B \cos 120°$; $D_1D^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$;
$D_1D^2 = 3a^2$; $D_1D = a\sqrt{3}$.
4. ΔCD_1D: $CD^2 = CD_1{}^2 + D_1D^2$; $CD^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2$; $CD = 2a$.

(*Ответ*: $2a$.)

Карточка № 3

Задача № 150

Дано: $ABCD$ прямоугольник; $AK \perp (ABC)$; $KD = 6$ см, $KB = 7$ см, $KC = 9$ см (рис. 5).

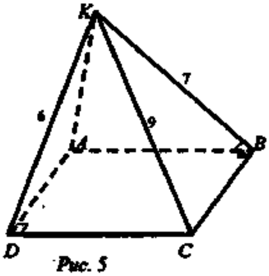


Рис. 5

Найти: $P(K; (ABC))$; $P(AK; CD)$.

Решение:

1. $P(K; (ABC)) = AK$; $AK \perp (ABC)$; $AB \perp BC$.
2. AB – проекция; KB – наклонная $\Rightarrow$ $\Rightarrow KB \perp CB$.
3. ΔKBC: в нем $KB = 7$ см; $KC = 9$ см; $\angle B = 90°$. По теореме Пифагора $CB = \sqrt{KC^2 - KB^2} = \sqrt{9^2 - 7^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ см.
4. ΔAKD: $KD = 6$ см; $AD = BC = 4\sqrt{2}$ см; $AK = \sqrt{KD^2 - AD^2}$; $AK = \sqrt{6^2 - (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{36 - 32} = 2$ см.
5. $P(AK; CD) = AD$; $AD = BC = 4\sqrt{2}$ см.

(*Ответ*: $AD = 4\sqrt{2}$ см.)

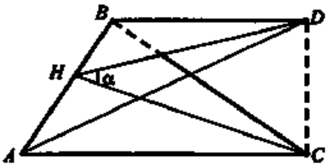


Рис. 6

Задача № 212

Дано: ΔABC и ΔABD; точка C проекция точки D на (ABC); $\angle((ABC), (ABD)) = \alpha$, $S_{\Delta ABC} = S$ (рис. 6).

Доказать: $S_{\Delta ABD} = \dfrac{S}{\cos\alpha}$.

Доказательство: Проведем в ΔABC высоту CH, тогда CH – проекция DH на плоскость (ABC) и по теореме о 3-х перпендикулярах $DH \perp AB$, и значит, DH высота ΔABD, $\angle DHC = \alpha$, но ΔDCH прямоугольный, поэтому $DH = \dfrac{CH}{\cos\alpha}$; $\cos\alpha = \dfrac{CH}{DH}$. $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot CH$;

$S_{\Delta ABD} = \dfrac{1}{2}AB \cdot DH$, тогда $\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABD}} = \dfrac{\frac{1}{2}AB \cdot CH}{\frac{1}{2}AB \cdot DH}$; $\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABD}} = \cos\alpha$. Отсюда

$S_{\Delta ABD} = \dfrac{S}{\cos\alpha}$, что требовалось доказать.

Карточка № 4

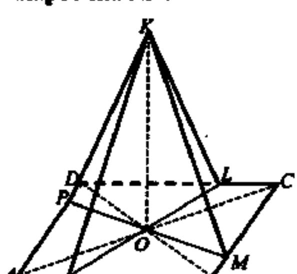


Рис. 7

Задача № 157

Дано: $ABCD$ – ромб, $AC \cap BD = O$, $OK \perp (ABC)$, $AC \perp BD$ (рис. 7).

Доказать: $KM = KN = KP = KL$, то есть O – центр вписанной в ромб окружности.

Доказательство:

1. $OK \perp (ABC)$; $KN \perp AB$; KN наклонная. ON проекция $\Rightarrow ON \perp AB$.
2. Аналогично доказывается, что $OM \perp BC$; $OP \perp AD$; $OL \perp DC$.
3. $OM = ON = OP = OL$ (как проекции равных наклонных).

4. K – равноудалена от всех сторон $ABCD$, следовательно, проектируется в центр O вписанной в него окружности.

б) $OK = 4{,}5$ дм; $AC = 6$ дм; $BD = 8$ дм. Найти KM. Так как $AC \cap BD = O$ середина AC и BD, то $BO = 4$ дм; $OC = 3$ дм. Тогда из ΔOBC: $BC = \sqrt{BO^2 + OC^2} = \sqrt{16+9} = 5$ дм. $OM \perp BC$, $OB^2 = BC \cdot BM$;

$BM = \dfrac{16}{5}$ дм. $OM = \sqrt{OB^2 - BM^2}$. $OM = \sqrt{16 - \dfrac{256}{25}} = \sqrt{\dfrac{16 \cdot 25 - 16^2}{25}} =$

$= \sqrt{\dfrac{16}{25} \cdot (25-16)} = \dfrac{4}{5} \cdot 3 = \dfrac{12}{5}$ дм $= 2{,}4$ дм. ΔKOM: $KM = \sqrt{OK^2 + OM^2} =$

$= \sqrt{4{,}5^2 + 2{,}4^2} = \sqrt{20{,}25 + 5{,}76}$; $KM = \sqrt{26{,}01} = 5{,}1$ дм.

(*Ответ*: 5,1 дм.)

Задача № 206

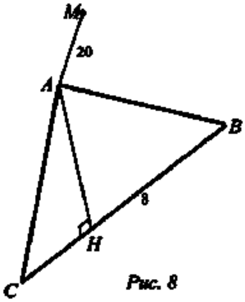


Рис. 8

Дано: ΔABC; $\angle A$ меньший; $AM \perp (ABC)$; $BC = 8$ см; $AB = 17$ см; $AC = 15$ см (рис. 8).

Найти: $P(M; BC) = MH$.

Решение: Так как против меньшего угла лежит меньшая сторона, то $BC = 8$ см. Проведем высоту AH в ΔABC. Тогда по теореме о 3-х перпендикулярах $MH \perp BC$ (так как $AH \perp BC$), а следовательно, $P(M; BC) = MH$.

Пусть $AB = 17$ см; $AC = 15$ см, $BH = x$; $CH = 8 - x$ по теореме Пифагора $AH^2 = AC^2 - CH^2 = AB^2 - BH^2$, откуда $17^2 - x^2 = 15^2 - (8-x)^2$ $289 - x^2 = 225 - 64 + 16x - x^2$; $16x = 128$; $x = 8$. Таким образом $BH = 8$ см, это значит, $BH = BC$ и $AC \perp BC$, то есть $AH = AC$; $AC = 15$ см; $AM = 20$ см. Так как ΔMAC прямоугольный, то $MH = \sqrt{MA^2 + AH^2} =$

$= \sqrt{225 + 400} = \sqrt{625} = 25$. (*Ответ*: $MH = 25$ см.)

Карточка № 5

Задача № 171

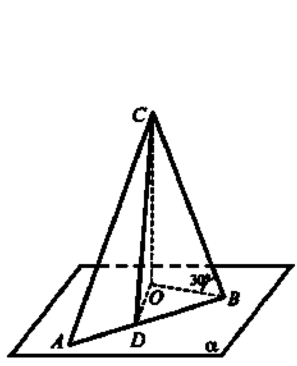


Рис. 9

Дано: α; ΔABC; $\angle C = 90°$; $AC = BC$; $AB \subset \alpha$. $\angle CBO = 30°$ (рис. 9).

Найти: $\angle(\alpha; (ABC))$.

Решение:

1. Проведем $CO \perp \alpha$, тогда $\angle CBO = 30°$. Пусть в ΔCOB $CO = a$, тогда $CB = 2a$.
2. Проведем $CD \perp AB$, тогда $AB \perp DO$ и по теореме, обратной теореме о 3-х перпендикулярах, $\angle CDO$ искомый.
3. Из Δ CDB известно, что $\angle CBD = 45°$, $CD = CB \cdot \sin 45°$, $CD = 2a \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$.

4. Из ΔCDO: $\sin\angle CDO = \dfrac{CO}{CD}$; $\sin\angle CDO = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\angle CDO = 45°$.

(*Ответ*: $\angle(\alpha; (ABC)) = 45°$.)

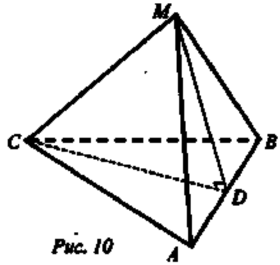


Рис. 10

Задача № 202

Дано: ΔABC, $\angle C = 90°$; CD – медиана; $MA = MB = MC = 10$ см. $CD = 5$ см (Рис. 10).

Найти: $P(M; (ABC))$

Решение:

1. Так как точка M равноудалена от всех вершин прямоугольного треугольника, то она проектируется в центр описанной около ΔABC окружности, то есть в середину гипотенузы точка D.
2. $MD \perp AD$; CD – проекция наклонной CM, значит, $MD \perp CD$ и ΔCDM имеет $\angle D = 90°$. 3. $CM = 10$ см; $CD = 5$ см, по теореме Пифагора $MD = \sqrt{CM^2 - CD^2} = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ (см).

(*Ответ*: $5\sqrt{3}$ см.)

Карточка № 6

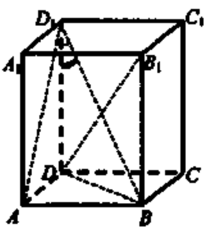


Рис. 11

Задача № 195

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямоугольный параллелепипед, $AC_1 = 12$ см; $\angle(BD_1; (AA_1D_1)) = 30°$; $\angle BD_1D = 45°$ (рис. 11).

Найти: AB; AD; AA_1.

Решение:

1. $BD_1 = AC_1 = 12$ см.
2. $AB \perp (ADD_1)$, значит, AD_1 проекция BD_1 на плоскость (AA_1D_1), значит, $\angle AD_1B = 30°$.
3. Из ΔABD_1 $BD = 12$ см; $\angle A = 90°$; $\angle AD_1B = 30°$, значит, $AB = \dfrac{1}{2}BD_1 = 6$ см.
4. ΔD_1DB прямоугольный; $\angle D = 90°$; $\angle BD_1D = 45°$, отсюда $\angle D_1BD = 45°$ и $DD_1 = DB = 12 \cdot \sin 45° = 6\sqrt{2}$ см.
5. Из ΔDAB: $AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{72 - 36} = 6$ см.

(*Ответ*: $AB = AD = 6$ см; $AA_1 = 6\sqrt{2}$ см.)

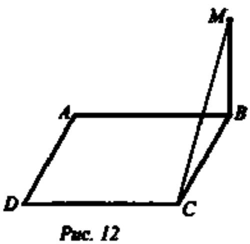


Рис. 12

Задача № 197

Дано: $ABCD$ прямоугольник, $BM \perp (ABC)$ (рис. 12).

Доказать: $CD \perp (MBC)$.

Доказательство: Так как $MB \perp (ABC)$, то $BM \perp CD$, и так как $ABCD$ прямоугольник, то $CD \perp BC$.

По признаку перпендикулярности прямой и плоскости $CD \perp (MBC)$, что требовалось доказать.

Глава III

МНОГОГРАННИКИ

§ 1. ПОНЯТИЕ МНОГОГРАННИКА. ПРИЗМА

(уроки 45–48)

Урок 45. Понятие многогранника

Цель урока:

– ввести понятие многогранника, призмы и их элементов.

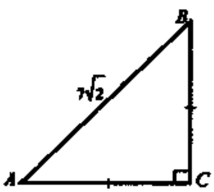
Ход урока

I. Итоги контрольной работы

II. Актуализация опорных знаний

Фронтальный опрос

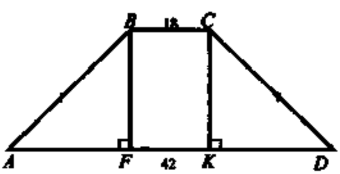
1) Сумма углов треугольника.
2) Свойства углов при основании равнобедренного треугольника.
3) Чему равны острые углы равнобедренного прямоугольного треугольника?
4) Свойство катета, лежащего против угла в 30°.



5) Что называется углом между прямой и плоскостью?
6) Что называется линейным углом двугранного угла?
7) Найдите AC и BC.

Решение (рис. 1):

Вопрос учащимся: а) Какой треугольник? б) Какую теорему можно применить? $AC = BC = x$, $2x^2 = (7\sqrt{2})^2$, $x^2 = 49$, $x = 7 \Rightarrow AC = 7$ и $BC = 7$.



8) Найдите AF, если $ABCD$ – равнобедренная трапеция. BC = 14 см, AD = 42 см (рис. 2).

Решение:

Вопрос учащимся: а) Какое дополнительное построение нужно выполнить? ($CK \perp AD$); б) Рассмотреть треугольники AFB и CKD (доказать равенство); в) На основании того, что $\Delta AFB = \Delta CKD$, сделать вывод равенства $AF = KD$; г) $AF = (AD - BC) : 2 = = (42 - 18) : 2 = 12$ см.

III. Мотивация и сообщение темы урока

1) Напомнить известные учащимся понятия тетраэдра и параллелепипеда.

Заранее предложить двум учащимся выступить с небольшими сообщениями на темы: «Параллелепипед и его основные элементы» и «Тетраэдр и его основные элементы».

2) *Слово учителя*: Обратите внимание, что каждая из этих поверхностей ограничивает некоторое геометрическое тело, отделяет это тело от остальной части пространства. Поверхность, составленную из многоугольников и ограничивающую некоторое геометрическое тело, будем называть многогранной поверхностью или многогранником.

Многие строения в окружающем нас мире, в частности, пирамида Хеопса, имеют форму многогранников. Поэтому для лучшей эксплуатации и моделирования зданий нужно изучить свойства многогранников.

Многие многогранники изобрел не человек, а создала природа в виде кристаллов, соли – куб, льда, хрусталя – «заточенная» с двух сторон призма.

(При объяснении и разговоре с учащимися использовать как можно больше разнообразных моделей, рисунков, чертежей).

Кристаллы граната, кварца, каменной соли.

IV. Объяснение темы

1) Вводятся элементы многогранников: грани, ребра, вершины, диагонали граней, диагонали многогранника (в соответствии с п. 25).

Вопрос: из чего состоит поверхность многогранника? (*Ответ*: из многоугольников.)

Вывод: многоугольники – это грани.

Вопрос: что такое многоугольник? (*Ответ*: это плоская фигура, образованная замкнутым рядом прямоугольных отрезков.)

Вывод: прямолинейные отрезки – это ребра, а концы ребер – это вершины.

Отрезок, соединяющий две несоседние вершины одной грани, называется диагональю грани, а отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, – это диагональ многогранника.

2) В школе изучаются многогранники, Эйлерова характеристика которых равна 2, то есть В – Р + Г, где В – число вершин, Р – число ребер, Г – число граней.

Для закрепления понятий элементов многогранников следует с учащимися заполнить таблицу уже известных многогранников.

№	Наименование многогранника	В	Р	Г	Эйлерова характеристика
1	Тетраэдр	4	6	4	$4-6+4=2$
2	Параллелепипед	8	12	6	$8-12+6=2$
3	Куб	8	12	6	$8-12+6=2$

3) Вводится понятие призма, что это тоже многогранник, а также ее элементов: высота призмы, боковые грани, боковые ребра (в соответствие с п. 27).

Раздать на парту модели пирамиды или призмы и дать возможность самостоятельно подсчитать Эйлерову характеристику.

Затем сделать вывод на основании вычислений, как подсчитать число вершин, ребер и граней для любой пирамиды и любой призмы и продолжить заполнение таблицы.

4	n – угольная пирамида	$n+1$	$2n$	$n+1$	$n+1-2n+n+1=2$
5	n – угольная призма	$2n$	$3n$	$n+2$	$2n-3n+n+2=2$

Равенство, которое выражает Эйлерову характеристику, было им доказано в 1752 году.

И оно верно для произвольного выпуклого многогранника. Наряду с ними существуют невыпуклые многогранники.

Дается определение в соответствие с п. 25 и рис. 67, 68, 69.

4) В любом многограннике сумма всех плоских углов при каждой его вершине меньше 360°.

Доказать это можно с помощью разверток, например, тетраэдр. Очевидно, что $\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3<360°$.

Параллелепипед (прямоугольный).

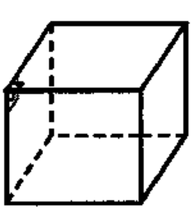
Вопрос: Сколько углов имеют общую вершину? (*Ответ*: три, причем все по 90°.)

Вывод: $90°+90°+90°=270°<360°$.

V. Закрепление изученного материала

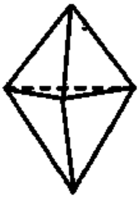
Контрольные вопросы

1) Объясните, что такое: а) многогранник; б) поверхность многогранника.
2) Какой многогранник называется выпуклым?
3) Дан куб – выпуклый многогранник (проверьте). Как, имея пилу, получить из деревянного куба модель невыпуклого многогранника?



4) Дан выпуклый многогранник. Что называют а) его гранью; б) его ребром; в) его вершиной?
5) Назовите известные вам многогранники. а) Выпуклым или не выпуклым является каждый из них? б) Сколько граней, ребер и вершин у каждого?

6) Дан квадрат. На нем как на основании построены куб и пирамида. Сколько вершин, ребер и граней в полученном многограннике? Является ли он выпуклым?
В = 9; Г = 9; Р = 16; 9 – 16 + 9 = 2. Да.
7) Два тетраэдра имеют общую грань и расположены по разные стороны от нее. Сколько вершин, ребер и граней в полученном многограннике? Является ли он выпуклым?
В = 5; Г = 6; Р = 9; 5 – 9 + 6 = 2. Да.



8) Сколько трехгранных, двугранных и плоских углов: а) у тетраэдра; б) у параллелепипеда;

VI. Решение задач (применение знаний в стандартной ситуации)

№ 219. *Дано:* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, $AB = 12$ см, $BC = 5$ см, угол между AC_1 и (ABC) 45° (рис. 3).
Найти: BB_1.

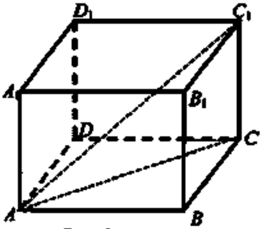


Рис. 3

Решение: Проекцией AC_1 на плоскость (ABC) является AC ($CC_1 \perp (ABC)$, значит, $AC \perp CC_1$). Значит, $\angle CAC_1 = 45°$. Имеем: ΔACC_1 прямоугольный и равнобедренный $AC = CC_1 = BB_1$. Найдем AC:
$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{144 + 25} = 13$ см. Значит, $CC_1 = BB_1 = 13$ см. (*Ответ*: 13 см.)

№ 220. *Дано:* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, $AB = BC$, $AC = 24$ см, $BD = 10$ см, $AA_1 = 10$ см (рис. 4).
Найти: большую диагональ.

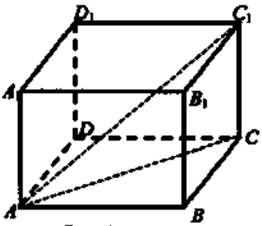


Рис. 4

Решение: Большая диагональ AC_1 (так как большая диагональ ромба AC является проекцией диагонали AC_1, чем больше ее проекция, тем больше ее наклонная). ΔACC_1 – прямоугольный треугольник. (Почему?)

$$AC_1 = \sqrt{AC^2 + CC_1^2} = \sqrt{24^2 + 10^2} = \sqrt{676} =$$

$= 26$ см. (*Ответ*: 26 см.)

№ 223. *Дано:* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, ABC_1D_1 – сечение. $S_{ABC_1D_1} = 64\sqrt{2}$ см² (рис. 5).
Найти: AB; AC_1.

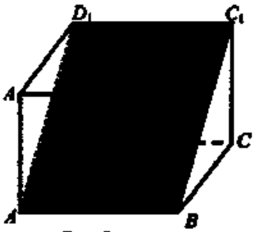


Рис. 5

Решение: $BC_1 = x\sqrt{2}$ см. $S_{\Delta BC_1D_1} = AB \cdot BC_1 =$
$= x \cdot x \cdot \sqrt{2}$, $x^2\sqrt{2} = 64\sqrt{2}$, $x = 8$, $AB = 8$ см.

$$AC_1 = \sqrt{AB^2 + BC_1^2} = \sqrt{8^2 + (8\sqrt{2})^2} = \sqrt{64 \cdot 3} =$$

$= 8\sqrt{3}$ см. (*Ответ*: $AB = 8$ см, $AC_1 = 8\sqrt{3}$ см.)

Домашнее задание

П. 25, 26, 27.

Вопросы: 1, 2, к гл. III. № 220 (решение на стр. 6); № 295 (*а, б*); № 295 (*в, г*) – по желанию, для более подготовленных учеников.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – наклонный параллелепипед. $ABCD$ – ромб. CC_1 составляет одинаковые углы с DC и BC, то есть $\angle C_1CB = \angle C_1D$ (рис. 6).

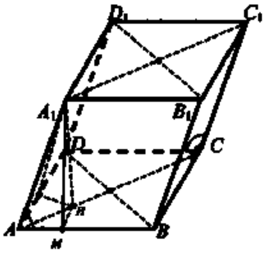


Рис. 6

Доказать: а) $CC_1 \perp BD$; б) BB_1D_1D – прямоугольник; в) $BD \perp AA_1C$; г) $AA_1C_1 \perp BB_1D_1$.

Доказательство: а) $CC_1 \parallel AA_1$; $ABCD$ – ромб. Отсюда $\angle A_1AD = \angle A_1AB$. Построим $A_1H \perp$ плоскости ABC, $HM \perp AB$, $HN \perp AD$, отрезки A_1M и A_1N. Нам надо доказать, что высота параллелепипеда A_1H проецируется в точку H на диагонали AC. Так как по построению $A_1H \perp AB$ и $MN \perp AB$, то по теореме о трех перпендикулярах имеем: $A_1M \perp AB$. Так как $A_1H \perp AD$ и $NH \perp AD$, то по теореме о 3-х перпендикулярах имеем: $A_1N \perp AD$. $\Delta A_1AM = \Delta A_1AN$, ($A_1A$ – общая, они прямоугольные и имеют по равному острому углу). Отсюда следует, что $AM = AN$. $\Delta AHM = \Delta AHN$, (так как они прямоугольные, гипотенуза AH – общая, $AN = AM$). Отсюда следует, что $\angle HAM = \angle HAN$, то есть точка H лежит на биссектрисе угла ромба, которая является диагональю ромба; а диагонали ромба взаимно перпендикулярны. Так как $A_1H \perp AC$ и $A_1A \perp DB$ (по теореме о 3-х перпендикулярах), но так как $A_1A \parallel C_1C$, то $C_1C \parallel DB$.

Утверждение а) доказано.

б) Докажем, что BB_1D_1D – прямоугольник.

Так как $D_1D \parallel DB$ и $DD_1 \parallel B_1B$, то DD_1B_1B – параллелограмм.

$B_1B \parallel A_1D_1$, но так как доказано, что $A_1A \perp DB$.

Значит, в параллелограмме D_1DB_1B $\angle B_1BD = 90°$, и поэтому данный параллелограмм – прямоугольник.

в) Докажем, что $BD \perp$ плоскости AA_1C_1.

$DB \perp AC$ и $DB \perp AA_1$ – по свойству диагоналей ромба. Отсюда $DB \perp$ плоскости A_1ACC_1, то есть в) доказано.

Урок 46. Призма. Площадь поверхности призмы

Цели урока:

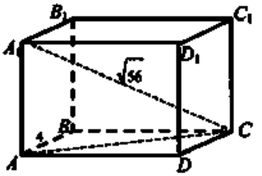
1) рассмотреть виды призмы, ввести понятие площади поверхности призмы;
2) вывести формулу для вычисления площади поверхности прямой призмы.

Ход урока

I. Проверка домашнего задания

Индивидуальный и фронтальный опрос

Двое у доски записывают решение домашних номеров. № 220 и № 295 (*а, б*) и третий № 295 (*в, г*). Двое учеников решают задачи по карточкам индивидуального опроса.

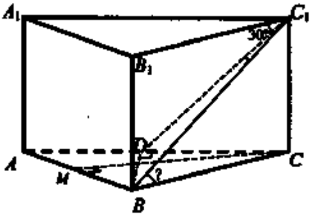


Карточка 1 (для среднего ученика).

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед. $AB = 4$, $AA_1 = 6$, $A_1C = \sqrt{56}$.

Найдите: AD.

Решение: $AC = \sqrt{56-36} = \sqrt{20}$ $AD = = \sqrt{20-16} = \sqrt{4} = 2$. (*Ответ:* 2.)



Карточка 2 (для сильного ученика)

Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – прямая треугольная призма: $AC = BC = 5$, $AB = 6$, $BD \perp AC$ $\angle BCD = 30°$.

Найдите: $\cos C_1BC$.

Решение: В ΔABC: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot MC = \frac{1}{2} AC \cdot BD$, так как $MC = 4$, то $BD = \frac{AB \cdot MC}{AC} = 4,8$. $BC_1 = 2BD = 9,6$; $\cos\angle C_1BC = \frac{BC}{BC_1}$, так как ΔCC_1B прямоугольный – $\cos\angle C_1BC = \frac{5}{9,6} = \frac{25}{48}$.

(*Ответ*: $\frac{25}{48}$.)

С остальными учащимися проводится устный опрос.

1. Среди изображенных тел выберите те, которые являются многогранниками.

(*Ответ:* 1, 2, 5, 6.)

2. Какие из них являются призмами?

(*Ответ*: 1 и 6 (рисунки оставить на доске и распределить между вариантами)).

3. Обозначьте и назовите для призмы:

а) вершины;	д) противоположные грани;
б) основания:	е) диагонали грани;
в) боковые грани;	ж) диагонали призмы.

4. Закончите предложения:

1) Высотой призмы называется …

2) Диагональю призмы называется…

3) Диагональным сечением призмы называется сечение плоскостью, проходящей через …
4) Параллелепипедом называется …
5) Прямоугольным параллелепипедом называется …
6) Кубом называется прямоугольный параллелепипед, у которого …
7) Примером моделей призмы и параллелепипеда из реальной жизни является …

5. Ответьте на вопросы:
1) Какие многогранники лежат в основании призмы?
2) В каких плоскостях лежат основания призмы?
3) Какими отрезками являются боковые ребра призмы?
4) Что представляет собой диагональное сечение призмы?
5) Какими многоугольниками являются все грани параллелепипеда (любого)?
6) Какими фигурами являются все грани прямоугольного параллелепипеда?
7) Сколько измерений у прямоугольного параллелепипеда?
8) Почему все высоты призмы равны между собой?
9) Какие многоугольники являются основаниями и боковой гранью треугольной призмы (четырехугольной и пятиугольной)?
10) Сколько диагоналей у треугольной (четырехугольной, пятиугольной) призм?
11) Призма имеет 30 граней. Какой многогранник лежит в ее основании? Сколько вершин и ребер?

$\Gamma = 30$ $\quad n = 30 - 2 = 28$-угольник

$O = 2$ $\quad B = 28 \cdot 2 = 56$

$P = 28 \cdot 3 = 84.$

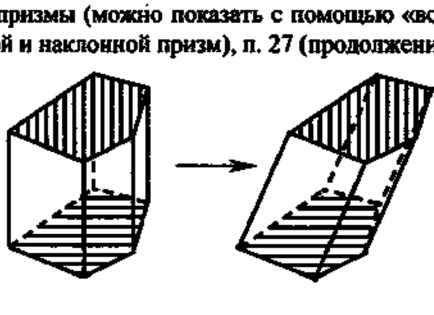
II. Объяснение нового материала

Вопрос: Покажите различие многоугольников, из которых состоит произвольный параллелепипед и правильный параллелепипед.

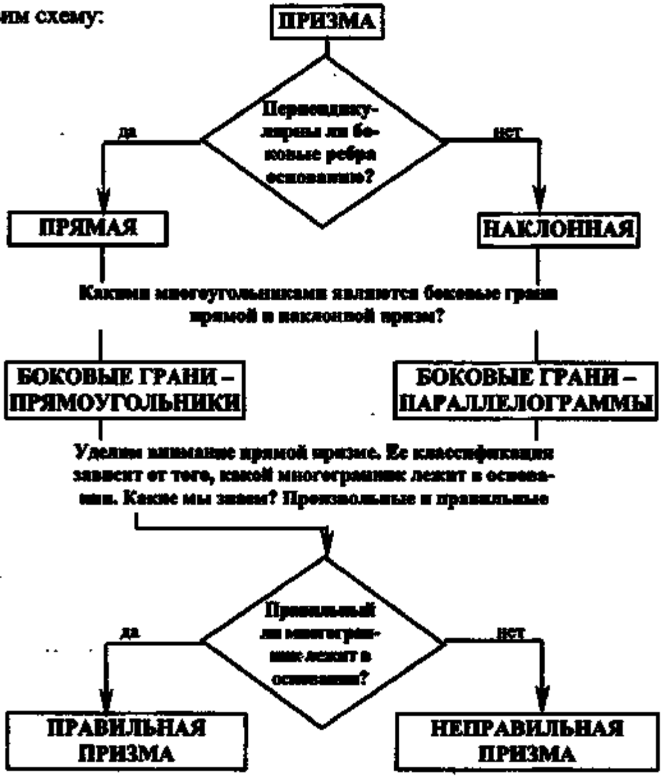
Ответ: Произвольный состоит из параллелограммов, а прямоугольный из прямоугольников.

Вывод: У произвольного параллелепипеда боковые ребра не перпендикулярны основанию, а у прямоугольного – перпендикулярны.

Так же и у призмы (можно показать с помощью «воздушной» модели, примеры прямой и наклонной призм), п. 27 (продолжение).



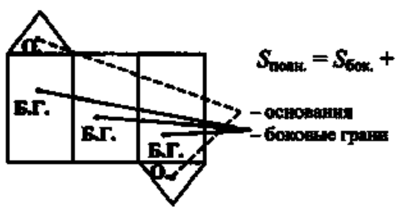
Составим схему:



Устно № 218

Решение: а) У прямой призмы боковые ребра перпендикулярны к основаниям, а основания – параллельны, следовательно, боковые грани – прямоугольники. б) Основания – правильные многогранники. Боковые ребра равны, боковые грани – равные прямоугольники.

Далее ввести понятие боковой поверхности, полной поверхности призмы (п. 27). Можно использовать развертки призм, например, треугольная.



$S_{полн.} = S_{бок.} + 2S_{осн.}$

Докажем теорему о площади боковой поверхности прямой призмы.

Теорема (п. 27)

Дано: Прямая n-угольная призма; пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – стороны, h – высота.

Доказать: $S_{бок.} = P_{осн.} \cdot h$.

Доказательство: Так как боковыми гранями прямой призмы являются прямоугольники, то площадь боковой поверхности равна сумме площадей указанных прямоугольников.

$$S_{бок.} = a_1 \cdot h + a_2 \cdot h + a_3 \cdot h + \quad \ldots \quad a_n \cdot h = \underbrace{(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)}_{P_o} \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{бок} = P_{осн.} \cdot h}$$

Теорема доказана.

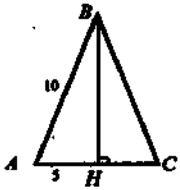
Составим таблицу и приведем в ней данные для вычисления $S_{бок.}$; $S_{осн.}$; $S_{полн.}$

Правильная призма	$S_{бок.}$	$S_{осн.}$	$S_{полн.}$
Треугольная призма	$3ah$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$	$a(3h + a\sqrt{3})$
Четырехугольная призма	$4ah$	a^2	$2a(h + a)$
Шестиугольная призма	$6ah$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$	$3a(2h + \sqrt{3}\,a)$

III. Применение знаний в стандартной ситуации

1. ***№ 229а***

P = 10 · 3 = 30 см. $S_{бок.} = 30 \cdot 15 = 450$ см^2.



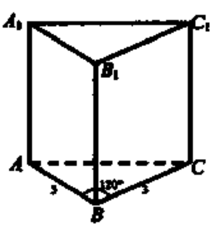
$BH = \sqrt{100 - 25} = 5\sqrt{3}$ см. $S_{осн.} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5\sqrt{3} = 25\sqrt{3}$ см^2.

$S_{полн.} = 450 + 2 \cdot 25\sqrt{3} = 450 + 50\sqrt{3}$ см^2. (*Ответ*: 450 см^2 и $450 + 50\sqrt{3}$ см^2.)

2. ***№ 230.*** *Дано:* $ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма, $AB = 5$ см, $BC = 3$ см, $\angle ABC = 120°$. Наибольшая из боковых площадей граней 35 см^2.

Найти: $S_{бок.}$

Решение:



1) Из ΔABC $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\beta =$
$= 25 + 9 - 2 \cdot 5 \cdot 3\left(-\frac{1}{2}\right) = 49$; AC = 7 см.
2) AC – большее ребро основания, значит, AA_1C_1C имеет большую площадь. $S_{AA_1C_1C} = AA_1 \cdot AC$;
$AA_1 \cdot 7 = 35$; $AA_1 = 5$. $S_{бок.} = 5 \cdot (5 + 3 + 7) =$
$= 5 \cdot 15 = 75$ (см^2).

(*Ответ*: 75 см^2.)

IV. Подведение итогов

Домашнее задание

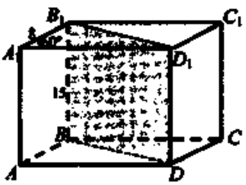
П. 27; вопросы 3–8 к главе III.

№ 229 (б, в)

б) В основании – квадрат. $S_{осн.} = a_4^2$; a_4 – сторона квадрата. $S_{бок.} = 4a_4 \cdot h$.

$S_{полн.} = 2a_4^2 + 4a_4 \cdot h$. $S_{бок.} = 384$ (дм^2). $S_{полн.} = 2 \cdot 12^2 + 384 = 672$ (дм^2).

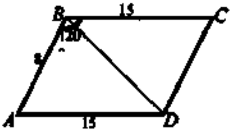
(*Ответ*: 672 дм^2.)



в) В основании – правильный 6-угольник. $S_{осн.} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a_6^2$; a_6 – сторона шестиугольника. $S_{бок.} = 6 \cdot a_6 \cdot h \cdot S_{бок.} = 69$ (дм^2). $S_{полн.} = 2S_{осн.} + S_{бок.} = 3\sqrt{3} - (2{,}3)^2 + 69 \approx 97$ (дм^2).

(*Ответ*: 97 дм^2.)

№ 231



Решение: Пусть $AB_1 = 8$ см, $A_1D_1 = 15$ см, $\angle B_1A_1D = 60°$. Пусть боковое ребро равно H, тогда площадь первого диагонального сечения $S_1 = H \cdot BD$, а площадь второго $S_2 = H \cdot AC$; $BD^2 = 64 + 225 - 2 \cdot 8 \cdot 15 \cdot \cos 60° = 289 - 120 = 169$. $BD = \sqrt{169} = 13$ (см). $AC^2 = 64 + 225 - 2 \cdot 8 \cdot 15 \cdot \cdot \cos 120° = 64 + 225 - 2 \cdot 8 \cdot 15\ \dfrac{1}{2} = 409$. $AC = \sqrt{409}$; $\sqrt{409} > 13$, поэтому $AC > BD$. Наименьшее сечение BB_1D_1D. Сечение изображено на рисунке, $H \cdot 13 = 130$, $H = 10$ (см). $S_{бок.} = 2S_{AA_1D_1D} + 2S_{AA_1B_1B} = 2 \cdot 15 \cdot 10 + 2 \cdot 8 \cdot 10 = 460$ (см^2). $2S_{осн.} = 2 \cdot 8 \cdot 15\sin 60° = 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 120\sqrt{3}$ (см^2). $S_{полн.} = 20(23 + 6\sqrt{3})$ (см^2). (*Ответ*: $20(23 + 6\sqrt{3})$ см^2.)

Урок 47. Повторение теории, решение задач на вычисление площади поверхности призмы

Цели урока:

1) повторить определения призмы, ее элементов, вывод формулы площади боковой поверхности призмы;
2) продолжить формирование навыков решения задач;
3) обеспечить в ходе урока воспитание трудолюбия, самостоятельности в поисках и выборе пути решения;
4) развивать творческие способности учащихся, познавательную активность.

Ход урока

I. Организационный момент

Постановка целей и задач урока.

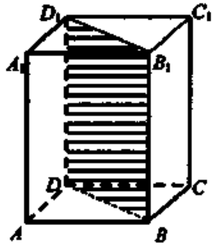
II. Проверка домашнего задания

Проверить решение домашних задач № 231 и № 232 – дать задание двум ученикам подготовить на доске краткое решение задачи, ход решения заслушать. Учащимся дается задание: внимательно выслушать решение и быть готовым ответить на вопрос: «Верно ли решена задача? Какие замечания к решению есть у тебя?».

Задача № 231

Решение: $S_{полн.} = S_{бок.} + 2\,S_{осн.}$

1) Пусть $AB = 15$ см; $AD = 8$ см; $\angle DAB = 60°$.



2) Отрезок DB – меньшая диагональ параллелограмма $ABCD$, найдем DB по теореме косинусов $DB^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB \cdot \cos 60°$;

$DB^2 = 225 + 64 - 2 \cdot 15 \cdot 8 \cdot \dfrac{1}{2} = 169$, $DB = 13$ см.

3) По условию, параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямой, диагональное сечение DBB_1D – прямоугольник, площадь которого 130 см^2. Следовательно, зная одну из сторон прямоугольника $DB = 13$ см, находим вторую сторону BB_1 – высоту данного прямого параллелепипеда. $BB_1 = 130 : 13 = 10$ (см).

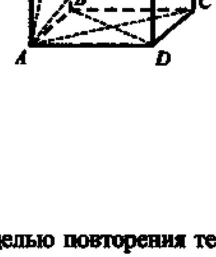
4) $S_{бок.} = P \cdot h$; $S_{бок.} = 2(8 + 15) \cdot 10 = 460$ (см^2); $S_{осн.} = ab\sin\alpha$; $2S_{осн.} =$
$= 2 \cdot 15 \cdot 8\sin 60° = 120\sqrt{3}$ (см^2).

5) $S_{полн.} = 460 + 120\sqrt{3} = 20(23 + 6\sqrt{3})$ (см^2).

(*Ответ*: $S_{полн.} = 20(23 + 6\sqrt{3})$ см^2.)

Задача № 232

Решение: Рассмотрим параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. $\angle C_1AB_1$ – угол между диагональю и боковой гранью. $\angle C_1AC$ – угол между диагональю и основанием, тогда $\sin\alpha = \dfrac{B_1C_1}{AC_1}$; $B_1C_1 = d\sin\alpha$;



$CC_1 = d\sin\varphi$. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений $d^2 = d^2\sin^2\varphi + d^2\sin^2\alpha + AB^2$;

$AB = d\sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\alpha}$. Площадь боковой поверхности равна $S_{б.п.} = 2\sin\varphi \cdot d(d\sin\alpha + d\sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\alpha} =$

$= 2d^2\sin\varphi \cdot (\sin\alpha + \sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\alpha})$.

(*Ответ*: $S_{б.п.} = 2d^2\sin\varphi(\sin\alpha + \sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\alpha})$.)

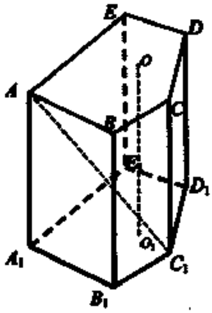
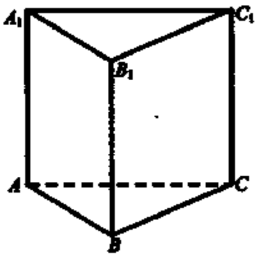
III. Актуализация знаний учащихся

1) Фронтальная работа. Работа проводится с целью повторения теоретического материала двух предыдущих уроков. На уроке по данной теме можно использовать справочную таблицу «Призма».

Таблица

Призма

1) n-угольники $ABCDE$, $A_1B_1C_1D_1E_1$ равны	$(AA_1 \perp ABC) \Leftrightarrow$ (прямая призма)
2) n = параллелограммов ABB_1A_1, ..., EAA_1E_1	

	
($OO_1 \perp ABC$), ($OO_1 \perp A_1B_1C_1$) ⇔ OO_1 – высота призмы (AA_1 – наклонная к плоскости ABC) ⇔ (наклонная призма)	(прямая призма, основание – правильный многоугольник) ⇔ (правильная призма)

$S_{полн.} = S_{бок.} + 2S_{осн.}$ Свойства прямой призмы: 1. Боковые грани – прямоугольники. 2. $S_{бок.} = P \cdot h$, P – периметр основания; h – высота призмы.

Вопросы классу:

1. Укажите на таблице высоту призмы, диагональ призмы, диагональ грани призмы.
2. Сколько вершин, ребер, граней имеет шестиугольная призма?
3. Какое наименьшее число ребер, граней, вершин может иметь призма?
4. Как называется призма, у которой каждая грань может служить основанием?
5. Сколько диагоналей можно провести в четырехугольной призме; в треугольной призме?
6. Докажите, что все высоты призмы равны.
7. Докажите, что любое ребро основания прямой призмы перпендикулярно к любому боковому ребру.
8. Какой отрезок служит проекцией диагонали прямой призмы на плоскость основания? На плоскость боковой грани?
9. Определите вид призмы, если две ее боковые грани, имеющие общее ребро, являются прямоугольниками.
10. Может ли быть наклонной призма, основание которой – прямоугольник?
11. Может ли быть наклонной призма, две боковые грани которой – прямоугольники?
12. Все боковые грани призмы – квадраты. Является ли эта призма правильной, если ее основание – треугольник, четырехугольник?
13. Чему равны градусные меры двухгранных углов, образованных боковыми гранями правильной призмы, если эта призма:

    а) треугольная;

    б) четырехугольная;

    в) пятиугольная.

14. Докажите теорему о площади боковой поверхности прямой призмы. Можно использовать таблицу.
15. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 1 м, 2 м, 3 м. Найдите площадь его полной поверхности. Найдите площадь его боковой поверхности, если боковые ребра:
а) больше ребер основания:
б) меньше ребер основания.

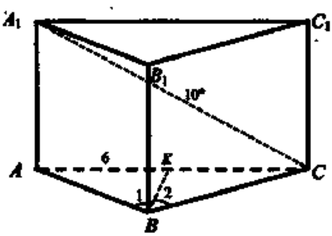
2) Индивидуальная работа

I уровень

Карточка № 1

Прочитайте условие задачи и разберите ее решение.

В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник с основанием, равным 6 см, и углом при вершине 120°. Диагональ боковой грани, содержащей основание равнобедренного треугольника, равна 10 см. Найдите площадь боковой поверхности.



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма; ΔABC – равнобедренный; $\angle ABC = 120°$; $AC = 6$ см, $AC = 10$ см.

Найти: $S_{б.п.}$.

Решение:

1. В плоскости $\alpha = (A,\ B,\ C)$ рассмотрим ΔABC. Проведем $BK \perp AC$.
2. $AK = KC$; $\angle 1 = \angle 2$ (свойство высоты равнобедренного треугольника).
3. Рассмотрим ΔAKB – прямоугольный; $\dfrac{AK}{AB} = \sin 60°$; $AB = \dfrac{AK}{\sin 60°}$;

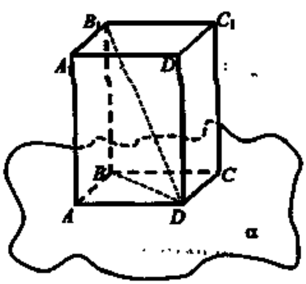
$AB = 3 : \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ (см).

4. Рассмотрим ΔAA_1C – прямоугольный, $AA_1 = \sqrt{A_1C^2 - AC^2}$ (по теореме Пифагора), $AA_1 = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$ (см).
5. $S_{б.п.} = P_{\Delta ABC} \cdot AA_1 = (2AB + AC) \cdot AA_1$; $S_{б.п.} = (2 \cdot 2\sqrt{3} + 6) \cdot 8 = 32\sqrt{3} + 48$ (см²).

(*Ответ*: $S_{б.п.} = (32\sqrt{3} + 48)$ (см²).)

II уровень

Карточка № 2



Прочитайте условие задачи и приведите в приведенном решении нужные обоснования.

В правильной четырехугольный призме диагональ, равная 6 см, образует с плоскостью основания угол, равный 30°. Найдите высоту призмы и ее объем.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильная призма; $B_1D = 6$ см; $\angle(B_1D, \alpha) = 30°$.

Найдите: а) B_1B; б) $V_{пр.}$.

Решение:

1. $BD = пр_\alpha B_1D \Rightarrow \angle B_1DB$ – угол между диагональю B_1D и плоскостью основания (по определению). $\angle B_1DB = 30°$.
2. ΔB_1DB – прямоугольный, так как …
3. B_1B – катет, лежащий против угла 30°. $B_1B = \frac{1}{2}B_1D$, так как …
4. $BD = B_1D \cdot \cos 30°$, так как …
5. $ABCD$ – квадрат, так как …
6. ΔABD – равнобедренный и прямоугольный, $BD^2 = 2AD^2$, так как …

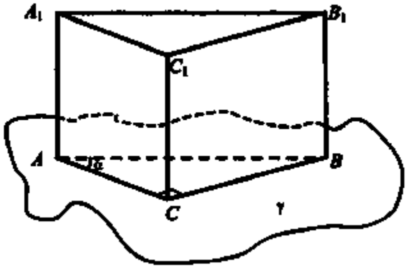
$$AD^2 = \frac{BD^2}{2};\ AD = \frac{BD}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} = 1{,}5\sqrt{6} \text{ см.}$$

7. $V_{пр.} = abc$; $V_{пр.} = S_{осн.} \cdot CB_1 = \frac{BD^2}{2}BB_1$; $V_{пр.} = \frac{27}{2} \cdot 3 = 40{,}5$ (см³).

(*Ответ*: $BB_1 = 3$ см; $V_{пр.} = 40{,}5$ см³.)

III уровень

Карточка № 3



В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C$ – прямой) с острым углом α и гипотенузой с. Найдите угол, образованный плоскостью нижнего основания призмы и плоскостью, проходящей через катет AC и вершину B_1 верхнего основания, если высота призмы равна H.

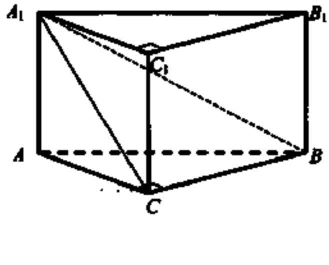
Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма $AB = c$; $BB_1 = H$; $\angle A = \alpha$.

Найдите: $\angle(\gamma, (AC, B_1)$.

План.

1. Постройте сечение, проходящее через AC и B_1. Плоскость сечения обозначьте β. 2. Постройте линейный угол между плоскостями β и γ. Помните, что $AC \perp BC$. 3. Найдите катет BC. 4. Найдите тангенс построенного линейного угла. 5. Запишите искомый угол.

Ответ:



IV. Решение задач

1) ***№ 235.*** *Дано:* $ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма; $\angle ABC = 90°$; $\angle CAB = \varphi$; ΔA_1CB – сечение; $\angle ACBA_1 = Q$.

Найти: $\frac{S_{б.п.}}{S_{сеч.}}$.

Решение:

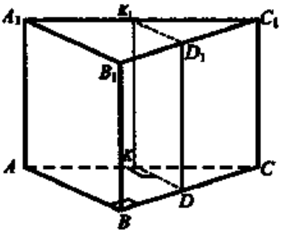
1. $AC = b$, тогда $CB = b\text{tg}\varphi$; $A_1C = \dfrac{b}{\cos Q}$; $AB = \dfrac{b}{\cos\varphi}$; $AA_1 = b\cdot\text{tg}Q$.

2. $S_{\text{б.п.}} = S_{A_1CB} = \dfrac{1}{2}b\text{tg}\varphi\dfrac{b}{\cos Q}$.

3. $S_{\text{б.п.}} = \text{P °h} = \left(b + b\text{tg}\varphi + \dfrac{b}{\cos\varphi}\right)b\text{tg}Q = \dfrac{b^2\text{tg}Q\left(b + b\cos\varphi + \sin\varphi + 1\right)}{\cos\varphi}$.

4. $\dfrac{S_{\text{б.п.}}}{S_{\text{сеч.}}} = \dfrac{b^2\text{tg}Q(\cos\varphi + \sin\varphi + 1)}{\cos\varphi}\cdot\dfrac{2\cos\varphi}{b^2 tg\varphi}$.

(*Ответ*: $\dfrac{2\sin Q(\cos\varphi + \sin\varphi + 1)}{\sin\varphi}$.)



Задача 234

Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма; $\angle ACB = 90°$; $AK = KC$; $KDD_1K_1 \perp AC$; $AB = 20$ см; $BC = 21$ см; $AA_1 = 42$ см.

Найти: $S_{KDD_1K_1}$.

Решение:

1. $AC = 29$ см; $AK = 14{,}5$ см. $\Delta ABC \sim \Delta DKC$ (по двум углам); $\dfrac{AB}{KD} = \dfrac{BC}{KC}$; $KD = \dfrac{20\cdot 14{,}5}{21} = \dfrac{290}{21}$.

2. $S_{KDD_1C_1} = \dfrac{290}{21}\cdot 42 = 580\ (\text{см}^2)$.

(*Ответ*: 580 см^2.)

V. Подведение итогов урока

1) Обучающая самостоятельная работа

I уровень

В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ACB ($\angle C = 90°$); $AC = 4$; $BC = 3$. Через сторону AC и вершину B_1 проведена плоскость. $\angle B_1AC = 60°$. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

II уровень

В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный ΔABC ($\angle C = 90°$). Через сторону BC и вершину A_1 проведена плоскость, $\angle BA_1C = 30°$, $A_1B = 10$; $AC = 5$. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

III уровень

1) В прямом параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 1$; $BC = 7\sqrt{3}$; $\angle ABC = 150°$. Через диагональ AC и вершину B_1 проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания угол 60°. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

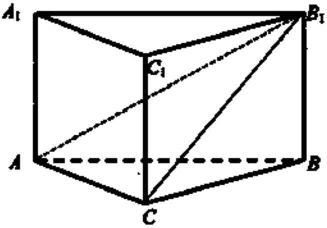
2) Оценить работу учащихся на уроке.

Домашнее задание

1) П. 25–27, вопросы к главе III 1–9. 2) Решить задачи: I уровень № 236, 238. II уровень № 236, 238, 298.

Решения задач самостоятельной работы

I уровень



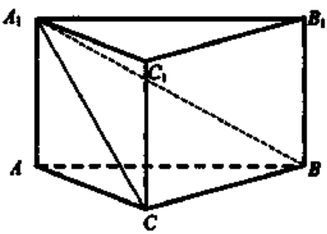
Решение:

1. $CC_1 \perp AC$ и $AC \perp BC$, то $AC \perp (CBB_1)$ $\Rightarrow AC \perp CB_1$. ΔACB_1 – прямоугольный.
2. $CB_1 = AC \cdot \mathrm{tg}60° = 4\sqrt{3}$.
3. $BB_1 = \sqrt{CB_1^2 - BC^2} = \sqrt{48-9} = \sqrt{39}$.
4. $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$.

5. $S_{п.б.} = P \cdot h$. $S_{б.п.} = (5 + 4 + 3)\sqrt{39} = 12\sqrt{39}$.

(*Ответ*: $S_{б.п.} = 12\sqrt{39}$.)

II уровень



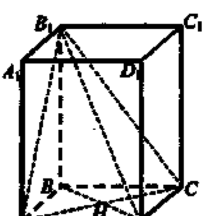
Решение:

1. $A_1C \perp BC$ (по теореме о трех перпендикулярах)
2. $BC = \frac{1}{2} A_1B$ 5.
3. $AB = 5\sqrt{2}$.
4. $AA_1 = \sqrt{100-50} = 5\sqrt{2}$.
5. $S_{п.б.} = AA_1(AB + BC + AC)$;

$S_{б.п.} = 5\sqrt{2}(5\sqrt{2} + 10) = 50 + 50\sqrt{2} = 50(1 + \sqrt{2})$.

(*Ответ*: $50(1 + \sqrt{2})$.)

III уровень



Решение:

1. $BH \perp AC$; ΔABC: $BH \cdot AC = AB \cdot BC\sin 150°$;
$$BH = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin 150°}{AC}.$$
2. ΔABC: по теореме косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 150°$; $AC^2 = 1 + 49 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 7\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + 147 + 21 = 169$; $AC = 13$.

3. $BH = \frac{1 \cdot 7\sqrt{3} \cdot 1/2}{13} = \frac{7\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$.

4. $\Delta BB_1H: BB_1 = BH \cdot \operatorname{tg}60^\circ = \frac{7\sqrt{3}}{2\cdot 13}\sqrt{3} = \frac{21}{26}$.

5. $S_{п.б.} = \frac{21}{13}(7\sqrt{3}+1)$.

(*Ответ*: $S_{п.б.} = \frac{21}{13}(7\sqrt{3}+1)$.)

Урок 48. Решение задач на вычисление площади поверхности призмы

Цели урока:

1) продолжить формирование навыков решения задач по теме;
2) проверить навыки решения основных типов задач;
3) обеспечить в ходе урока воспитание целеустремленности, настойчивости, самостоятельности в поисках и выборе пути решения задач;
4) развивать творческие способности учащихся, их познавательную активность.

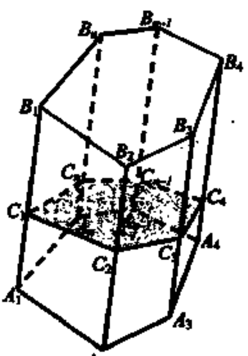
Ход урока

I. Организационная часть

Постановка целей и задач урока.

II. Проверка домашнего задания

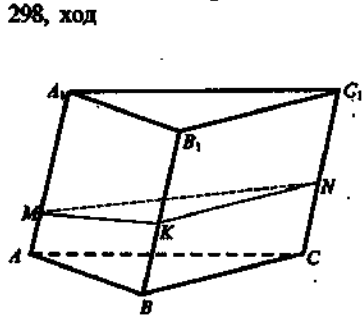
№ 236 проверяется по готовому слайду кодоскопа.



Решение: Пусть $C_1C_2C_3 \ldots C_{n-1}C_n$ перпендикулярное сечение наклонной призмы $A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_nB_1B_2B_3 \ldots B_{n-1}B_n$. Тогда площадь грани $A_1B_1B_2A_2$ равна $C_1C_2 \cdot A_1B_1$, так как Бокова грань – это параллелограмм, а CC_1 – высота этого параллелограмма. Сложив площади всех боковых граней, получим $S_{б.п.} = A_1B_1(C_1C_2 + C_2C_3 + + C_3C_4 + \ldots + C_{n-1}C_n) = A_1B_1 \cdot P_{сеч.}$, $S_б = l \cdot P_{сеч.}$, где l – длина бокового ребра; $P_{сеч.}$ – периметр перпендикулярного сечения.

Двоим учащимся дается задание подготовить краткую запись решения задач № 238 и 298, ход решения заслушать.

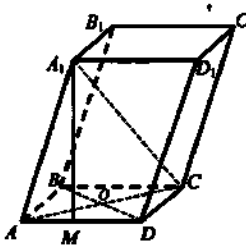
№ 238



Решение: По условию $BB_1 = 24$ см, грани AA_1B_1B и BB_1C_1C взаимно перпендикулярны; ΔMNK прямоугольный, $MN = \sqrt{12^2 + 35^2} = \sqrt{1369} = 37$ (см).

Найдем периметры перпендикулярного сечения MNK. $P = 12 + 35 + 37 =$ 84 (см). $S_{б.п.} = 84 \cdot 24 = 2016$ (см^2). (*Ответ*: 2016 см^2.)

№ 298



Решение:

1) $AC^2 = 2a^2$; $AC = a\sqrt{2}$; $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$;

2) $A_1M^2 = \dfrac{a^2}{4} + b^2 - \dfrac{a^2}{2} = b^2 - \dfrac{a^2}{4}$;

3) $S_{б.п.} = 4 \cdot a\sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{4a}} = 2a\sqrt{4b^2 - a^2}$;

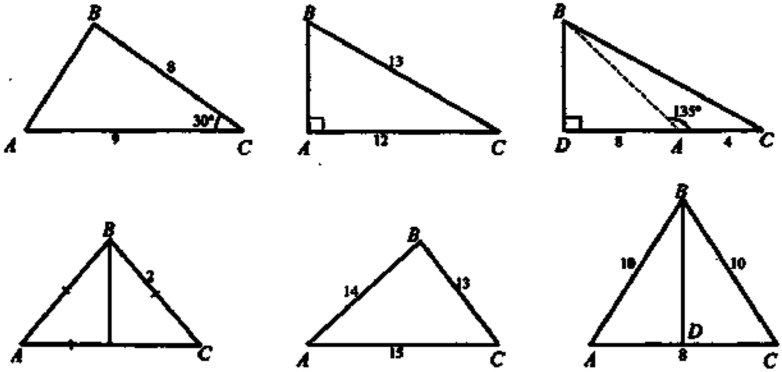
4) $S_{б.п.} = 2a^2 + 2a\sqrt{4b^2 - a^2}$.

(*Ответ*: $S_{полн.} = 2a^2 + 2a\sqrt{4b^2 - a^2}$.)

III. Актуализация знаний

Подготовка к проверочной самостоятельной работе.

1. Устное решение задач планиметрии по готовым чертежам.



Найти площадь ΔABC.

1) $S = \dfrac{1}{2} 8 \cdot 9\sin 30° = 18$;

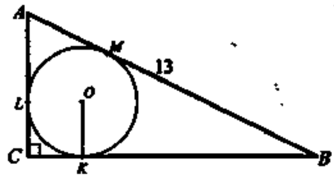
2) $AB = 5$; $S = \dfrac{1}{2} 5 \cdot 12 = 30$;

3) $S_{ABC} = S_{DBC} - S_{DBA} = \dfrac{1}{2} 12 \cdot 8 - \dfrac{1}{2} 8 \cdot 8 = 16$;

4) $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $S = \dfrac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$;

5) $p = (14 + 14 + 15) : 2 = 21$; $S = \sqrt{21 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 6} = 84$;

6) $BD = 2\sqrt{21}$; $S = \dfrac{1}{2} 8 \cdot 2\sqrt{21} = 8\sqrt{21}$.



2. Письменное решение планиметрической задачи, краткий ход решения ученик записывает на доске.

Решение:

1) $KB = x$; $BM = x$; $AM = 13 - x$; $AL = 13 - x$.
2) $KC = CK = 2$.
3) $AC = (15 - x)^2 + (x + 2) = 13^2$; $BC = x + 2$; $AB = 13$; $225 - 30x + x^2 + x^2 + 4x + 4 = 169$; $2x^2 - 26x + 60 = 0$; $x = 10$; $x = 3$; $AC = 3$ см; $BC = 12$ см; $S = \frac{1}{2} 3 \cdot 12 = 18$ (см^2).

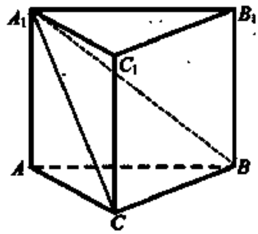
(*Ответ*: $S_{ABC} = 18$ см^2.)

3. Применение знаний в стандартной ситуации

Задача (ученик решает у доски).

Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна m, а острый угол равен 60°. Через катет, противоположный этому углу, и противоположную этому катету вершину другого основания проведено сечение, составляющее угол 45° с плоскостью основания.

1. Докажите, что ΔA_1CB прямоугольный.
2. Укажите различные способы вычисления площадей основания и сечения призмы.
3. Вычислите площадь основания призмы.
4. Вычислите площадь боковой поверхности призмы.



Решение:

1) $AC \perp CB$; $AA_1 \perp CB_1$, значит, $AC \perp CB$; ΔA_1CB – прямоугольный.
2) $S = \frac{1}{2}ab$; $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 60°$.
3) $AC = \frac{m}{2}$; $BC = \sqrt{m^2 - (m/2)^2} = \frac{m\sqrt{3}}{2}$; $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{m\sqrt{3}}{2} = \frac{m^2\sqrt{3}}{8}$.
4) ΔAA_1C – равнобедренный и прямоугольный, $A_1A = AC = \frac{m}{2}$.
5) $S_{б.п.} = \left(m + \frac{m}{2} + \frac{m\sqrt{3}}{2}\right)\frac{m}{2} = \frac{m}{4}(3m + m\sqrt{3}) = \frac{m^2(3+\sqrt{3})}{4}$.

(*Ответ*: $S_{б.п.} = \frac{m^2(3+\sqrt{3})}{4}$.)

IV. Самостоятельная работа проверочного характера

I уровень

Вариант I

1. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 6 см, а диагональ боковой грани 10 см. Найдите площадь боковой и полной поверхности призмы.

2. Основание прямой призмы – ромб со стороной 5 см и тупым углом 120°. Боковая поверхность призмы имеет площадь 240 см^2. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через боковое ребро и меньшую диагональ основания.

Вариант II

1. Боковое ребро правильной треугольной призмы равно 9 см, а диагональ боковой грани равна 15 см. Найдите площадь боковой и полной поверхности призмы.
2. Основание прямой призмы – ромб с острым углом 60°. Боковое ребро призмы равно 10 см, а площадь боковой поверхности – 240 см^2. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через боковое ребро и меньшую диагональ основания.

II уровень

Вариант I

1. Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с катетами 15 и 20 см. Большая боковая грань и основание призмы равновелики. Найдите площадь боковой и полной поверхности призмы.
2. Боковая поверхность правильной четырехугольной призмы имеет площадь 16 дм^2. Диагональ основания призмы равна $4\sqrt{2}$ дм. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через диагонали двух смежных боковых граней, имеющих общую вершину.

Вариант II

1. Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с гипотенузой 25 см и катетом 20 см. Меньшая боковая грань и основание призмы равновелики. Найдите площадь боковой и полной поверхности призмы.
2. Высота правильной четырехугольной призмы равна 1 дм, а площадь боковой поверхности равна 16 дм^2. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через диагональ нижнего основания, и противолежащую вершину верхнего основания.

III уровень

Вариант I

1. Основание прямой призмы – равнобедренный треугольник с боковой стороной 6 см и углом при вершине 120°. Диагональ наибольшей боковой грани образует с плоскостью основания призмы угол 60°. Найдите площадь боковой грани и полной поверхности призмы.
2. Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной призмы равна Q. Сечение призмы, проходящее через диагональ нижнего основания и противолежащую вершину верхнего основания, образует с плоскостью основания призмы угол α. Найдите площадь сечения.

Вариант II

1. Основание прямой призмы – равнобедренный треугольник с основанием $6\sqrt{3}$ см и углом при основании 30°. Диагональ меньшей боковой грани образует с плоскостью основания призмы угол 45°. Найдите площадь боковой и полной поверхности призмы.

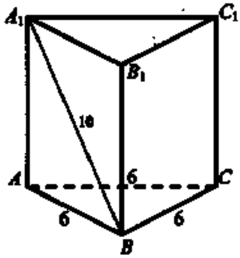
2) равна S. Сечение призмы, проходящее через середину бокового ребра и диагональ основания, не пересекающую данное ребро, образует с плоскостью основания угол α. Найдите площадь сечения.

Решения задач самостоятельной работы

I уровень

Вариант I

1. *Решение:*



1) ΔA_1AB: $AA_1 = \sqrt{A_1B^2 - AB^2}$;

   $AA_1 = \sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$ (см).

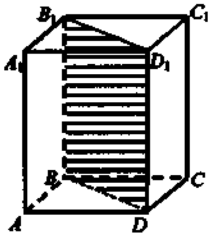
2) $S_{б.п.} = P_{осн.} \cdot h$; $S_{б.п.} = (3 \cdot 6) \cdot 8 = 144$ (см^2).

3) $S_{полн.} = S_{б.п.} + 2S_{осн.}$; $S_{осн.} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ (см);

   $S_{полн.} = 144 + 2 \cdot 9\sqrt{3} = 144 + 18\sqrt{3} =$

   $= 18(8 + \sqrt{3})$ (см^2).

(*Ответ*: $S_{б.п.} = 144$ см^2; $S_{полн.} = 18(8+\sqrt{3})$ см^2.)



2. *Решение:*

1) $\angle ABC = 120°$; $\angle BAD = 60°$; ΔABD – равносторонний; $BD = 5$ см.

2) $S_{б.п.} = P_{осн.} \cdot h$;

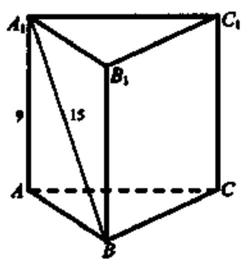
   $BB_1 = \dfrac{240}{4 \cdot 5} = \dfrac{240}{20} = 12$ (см).

3) $S_{BB_1D_1D} = BD \cdot BB_1 = 5 \cdot 12 = 60$ (см^2).

(*Ответ*: $S_{сеч.} = 60$ см^2.)

Вариант II

1. *Решение:*



1) ΔAA_1B: $AB = \sqrt{A_1B^2 - AA_1^2}$; $AB = \sqrt{225-81} =$

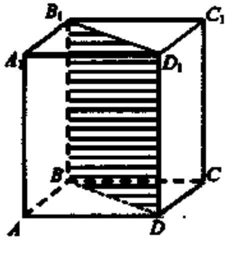
   $= \sqrt{144} = 12$ (см).

2) $S_{б.п.} = P_{осн.} \cdot h$; $S_{б.п.} = (3 \cdot 12) \cdot 9 = 324$ (см^2).

3) $S_{полн.} = S_{б.п.} + 2S_{осн.}$; $S_{осн.} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $S_{ABC} = \dfrac{144\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$ (см^2);

   $S_{полн.} = 324 + 2 \cdot 36\sqrt{3} = 36(9 + 2\sqrt{3})$ см^2.

(*Ответ*: $S_{б.п.} = 324$ см^2; $S_{полн.} = 36(9+2\sqrt{3})$ см^2.)



2. *Решение:*

1) $S_{б.п.} = P \cdot h$. По условию, $S_{б.п.} = 240$ см^2; $h = BB_1 = 10$ см, значит, $P_{осн.} = 240 : 10 =$ $= 24$ (см).

2) $AB = P : 4 = 24 : 4 = 6$ (см).

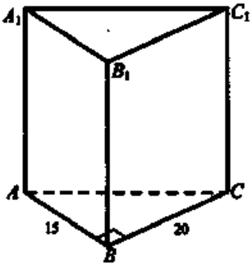
3) $\angle BAD = 60°$; ΔABD – равносторонний; $BD = 6$ см.

4) $S_{\text{сеч.}} = BB_1 \cdot BD = 6 \cdot 10 = 60$ (см^2).

(*Ответ*: $S_{\text{сеч.}} = 60$ см^2.)

II уровень

Вариант I



1. *Решение:*

1) $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\,15 \cdot 20 = 150$ (см^2).

2) ΔABC: $AC = \sqrt{400 + 225} = 25$ (см).

3) По условию $S_{ABC} = S_{AA_1C_1C}$;

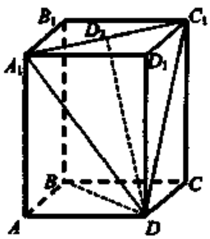
$S_{AA_1C_1C} = 150$ см^2; $AC = 25$ см;

$AA_1 = 150 : 25 = 6$ (см).

4) $S_{\text{б.п.}} = P_{\text{осн.}} \cdot h$; $S_{\text{б.п.}} = (15 + 20 + 25) \cdot 6 =$ $= 360$ (см^2).

5) $S_{\text{полн.}} = S_{\text{б.п.}} + 2S_{\text{осн.}}$; $S_{\text{полн.}} = 360 + 2 \cdot 150 = 660$ (см^2).

(*Ответ*: 360 см^2; 660 см^2.)



2. *Решение:*

1) ΔABD: $\sin 45° = \dfrac{AB}{BD}$;

$AB = 4\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 4$ (дм).

2) $S_{\text{б.п.}} = P \cdot h$;

$h = CC_1 = \dfrac{16}{4 \cdot 4} = \dfrac{16}{16} = 1$ (дм).

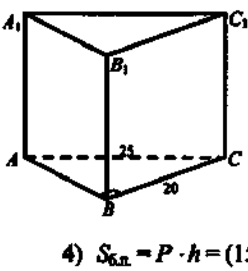
3) $DC_1 = \sqrt{DC^2 + CC_1^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$ (дм).

4) $\Delta DD_2C : DD^2 = DC_1^2 - D_2C_1^2$; $DD_2 = \sqrt{17 - 8} = \sqrt{9} = 3$ (дм).

5) $S_{A_1C_1D} = \dfrac{1}{2} A_1C_1 \cdot DD_2$; $S_{A_1C_1D} = \dfrac{1}{2} 4\sqrt{2} \cdot 3 = 6\sqrt{2}$ (дм^2).

(*Ответ*: $S_{A_1C_1D} = 6\sqrt{2}$ дм^2.)

Вариант II



1. *Решение:*

1) ΔABC: $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$;

$AB = \sqrt{625 - 400} = \sqrt{225} = 15$ (см).

2) $S_{AA_1B_1C} = S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 20 \cdot 15 = 150$ (см^2).

3) $AA_1 = 150 : 15 = 10$ (см).

4) $S_{\text{б.п.}} = P \cdot h = (15 + 20 + 25) \cdot 10 = 600$ (см^2).

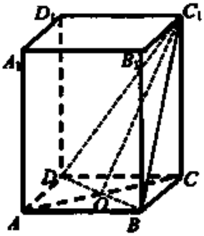
5) $S_{\text{полн.}} = S_{\text{б.п.}} + 2S_{\text{осн.}}$; $S_{\text{полн.}} = 600 + 2 \cdot 150 = 900$ (см^2).

(*Ответ*: 600 с м^2; 900 см^2.)

2. *Решение*:

1) $S_{б.п.} = 16$ дм^2; $S_{б.п.} = P \cdot h$;

$P = \dfrac{16}{1} = 16$ (дм); $AB = 16 : 4 = 4$ (дм).



2) ΔABD: $BD = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$ (дм).

3) ΔBCC_1: $BC_1 = \sqrt{BC^2 + CC_1^2}$;

$BC_1 = \sqrt{1^2 + (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{17}$ (дм).

4) ΔC_1OB: $C_1O = \sqrt{C_1B^2 - OB^2}$; $C_1O = \sqrt{17-8} = \sqrt{9} = 3$ (дм).

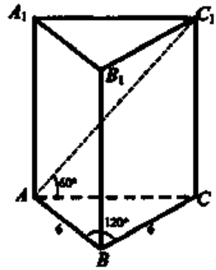
$S_{DBC_1} = \dfrac{1}{2} DB \cdot C_1O$; $S_{сеч.} = \dfrac{1}{2} 3 \cdot 4\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ дм^2.

(*Ответ*: $S_{сеч.} = 6\sqrt{2}$ дм^2.)

III уровень

Вариант I

1. *Решение:*



1) $S_{осн.} = \dfrac{1}{2} AB \cdot BC \sin 120°$;

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$ (см^2).

2) ΔABC: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos 120°$;
$AC^2 = 36 + 36 + 36 = 3 \cdot 36$; $AC =$
$= \sqrt{3 \cdot 36} = 6\sqrt{3}$ (см).

3) ΔACC_1: $CC_1 = AC \operatorname{tg} 60° = 6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 18$ (см).

4) $S_{б.п.} = P \cdot h = (6 + 6 + 6\sqrt{3}) \cdot 18 = 108 \cdot (2 + \sqrt{3})$ (см^2).

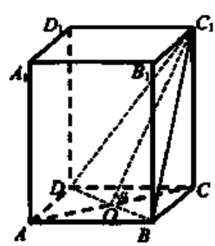
5) $S_{п.п.} = S_{б.п.} + 2S_{осн.}$; $S_{п.п.} = 108(2 + \sqrt{3}) + 18\sqrt{3}) = 216 + 126\sqrt{3})$ (см^2).

(*Ответ*: $108(2 + \sqrt{3})$ см^2; $216 + 126\sqrt{3}$ см^2.)

2 *Решение:*

1) $S_{б.п.} = Q$.

2) $DB \perp OC$, то $DB \perp OC$, по теореме о трех перпендикулярах, $\Rightarrow \angle C_1OC$ – линейный угол двугранного угла C_1DBC. По условию, $\angle C_1OC = \alpha$.



3) Пусть $AB = a$, $P = 4a$, $CC_1 = \dfrac{Q}{4a}$.

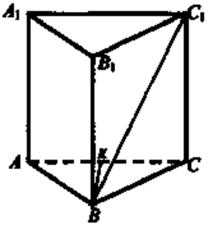
4) ΔADB: $DB = a\sqrt{2}$, $OC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

5) ΔC_1OC: $OC_1 = \dfrac{CC_1}{\sin\alpha} = \dfrac{Q}{4a} : \sin\alpha = \dfrac{Q}{4a\sin\alpha}$.

6) $S_{DC_1B} = \dfrac{1}{2} DB \cdot OC_1 = \dfrac{1}{2} a\sqrt{2} \dfrac{Q}{4a\sin\alpha} = \dfrac{Q\sqrt{2}}{8\sin\alpha}$.

(*Ответ*: $S_{сеч.} = \dfrac{Q\sqrt{2}}{8\sin\alpha}$.)

Вариант II



1. *Решение:*

1) ΔABC: $BK \perp AC$.

2) ΔBKC: $BC = \dfrac{KC}{\cos 30°} = \dfrac{3\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{3}} = 6$ (см).

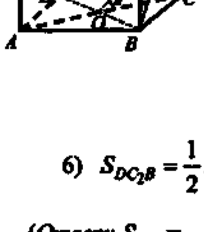
3) $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BC \sin 30°$; $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 6 \cdot \cdot \dfrac{1}{2} = 9\sqrt{3}$ (см^2).

4) Меньшая боковая грань та, что содержит меньшее основание $\angle C_1BC = 45°$, ΔBC_1C – равнобедренный, значит, $CC_1 = 6$ см.

5) $S_{б.п.} = (6 + 6 + 6\sqrt{3}) \cdot 6 = 36 \cdot (2 + \sqrt{3})$ (см^2).

6) $S_{п.п.} = 36 \cdot (2 + \sqrt{3}) + 2 \cdot 9\sqrt{3} = 72 + 36\sqrt{3} + 18\sqrt{3} = 72 + 54\sqrt{3}$ (см^2).

(*Ответ*: $36(2 + \sqrt{3})$ см^2; $18(4 + 3\sqrt{3})$ см^2.)



2. *Решение:*

1) $S_{б.п.} = S$.

2) $DB \perp OC$, то $DB \perp OC_2$, по теореме о трех перпендикулярах, $\Rightarrow$ $\angle C_2OC$ – линейный угол двугранного угла C_2DBC, $\angle C_2OC = \alpha$.

3) Пусть $AB = a$, $P_{осн.} = 4a$, $CC_1 = \dfrac{S}{4a}$; $C_2C = \dfrac{S}{8a}$.

4) ΔADB: $DB = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

5) ΔC_2OC: $C_2O = \dfrac{C_2C}{\sin\alpha} = \dfrac{S}{8a\sin\alpha}$.

6) $S_{DC_2B} = \dfrac{1}{2} BD \cdot C_2O = \dfrac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot \dfrac{S}{8a\sin\alpha} = \dfrac{S\sqrt{2}}{16\sin\alpha}$.

(*Ответ*: $S_{сеч.} = \dfrac{S\sqrt{2}}{16\sin\alpha}$.)

V. Подведение итогов

Домашнее задание

1. Повторить п. 25, 26.
2. Решить задачи другого варианта самостоятельной работы своего уровня.

§ 2. ПИРАМИДА

(уроки 49-53)

Урок 49. Пирамида

Цели урока:

1) ввести понятие пирамиды;
2) рассмотреть задачи, связанные с пирамидой.

Ход урока

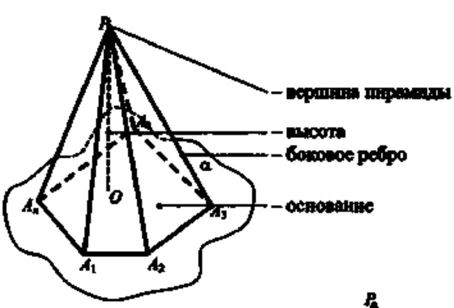
I. Проверка домашнего задания

II. Объяснение нового материала

Одним из важнейших видов многогранников являются пирамиды, с которыми вы уже неоднократно встречались. Еще в младенчестве вы играли игрушкой пирамидой. По истории знакомились с пирамидами Египта (пирамида фараона Хеопса XXVII в. до н. э.). Пирамиды используются в архитектуре (церковь преображения в Кижах, церковь в Каменском).

Дадим определение пирамиды.

Рассмотрим многоугольник $A_1A_2 \dots A_n$ и точку P, не лежащую в плоскости этого многоугольника, получим n треугольников PA_1A_2, PA_2A_3, ..., PA_nA_1 (1). Многогранник, составленный из n-угольника $A_1A_2 \dots A_n$ и n треугольников (1), называется пирамидой. Многоугольник $A_1A_2 \dots A_n$ называется основанием, треугольники (1) – боковыми гранями пирамиды. Точка P называется вершиной пирамиды, а отрезки PA_1, PA_2, ... PA_n – ее боковыми ребрами.



Пирамиду с основанием $A_1A_2 \dots A_n$ и вершиной P обозначают так: $PA_1A_2 \dots A_n$, и называют n-угольной пирамидой. Перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды к плоскости основания, называется высотой пирамиды PH.

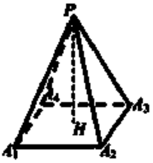


Рис 1

Рис. 2

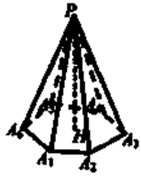


Рис. 3

$PA_1A_2A_3A_4$ – четырехугольная пирамида (рис. 1); $PA_1A_2A_3$ – треугольная пирамида, тетраэдр (рис. 2); $PA_1A_2A_3A_4A_5A_6$ – шестиугольная пирамида (рис. 3). Перпендикуляр PH – высота (рис. 1, рис. 2, рис. 3).

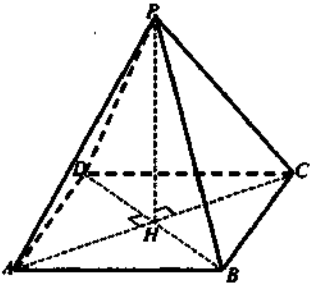
Площадью полной поверхности пирамиды называется сумма площадей всех ее граней. Площадью боковой поверхности пирамиды – сумма площадей ее боковых граней.

$S_{полн.} = S_{бок.} + S_{осн.}$.

(При объяснении темы использовать модели пирамид.)

III Закрепление нового материала

1) Устная работа.
   а) Что называется пирамидой, основанием пирамиды, боковыми гранями, боковыми ребрами, вершиной?
   б) Что называется площадью боковой поверхности пирамиды, площадью полной поверхности пирамиды?
2) Решение задач. № 239 решают ученики у доски, № 247(а) по готовому чертежу, № 242 (в слабом классе показывает учитель; в сильном классе составить план решения, учащиеся записывают подробное решение в тетрадь самостоятельно).



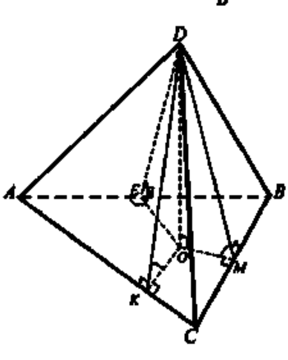
№ 239

Основанием пирамиды является ромб, сторона которого равна 5 см, а одна из его диагоналей равна 8 см. Найдите боковые ребра пирамиды, если высота ее проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 7 см.

Дано: $PABCD$ – пирамида; $ABCD$ – ромб; $AB = 5$ см; $AC = 8$ см; $PH \perp ABC$, H – середина диагоналей ромба; $PH = 7$ см.

Найти: PA; PB; PC; PD.

Решение:



1. PA из ΔPHA (прямоугольного), $PA^2 = PH^2 + AH^2$; $AH = \frac{1}{2}AC$ (по свойству диагоналей ромба); $AH = 4$ (см); $PA^2 = 7^2 + 4^2$; $PA^2 = 65$ (см); $PA = \sqrt{65}$ (см^2).
2. $\Delta PHA = \Delta PHC$ ($AH = HC$, PH – общая сторона) $PC = \sqrt{65}$ (см) $PC = PA$.
3. PB из ΔPHB (прямоугольного); $PB^2 = HB^2 + PH^2$; HB из ΔAHB (прямоугольный, по свойству диагоналей ромба) $HB^2 = AB^2 - AH^2$; $HB^2 = 25 - 16 = 9$; $PB = \sqrt{7^2 + 9} = \sqrt{58}$ (см).
4. $PB = PB$, так как $\Delta PHD = \Delta PHB$ ($HD = HB$, PH – общая сторона) $PD = \sqrt{58}$ (см).

(*Ответ*: $\sqrt{65}$; $\sqrt{58}$; $\sqrt{65}$; $\sqrt{58}$.)

№ 247в

Двугранные углы при основании пирамиды равны. Докажите, что высота пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в основание.

Дано: $DABC$ – пирамида, $\angle DMO = \angle DKO = \angle DFO$. Доказать O – центр вписанной окружности.

Решение:

1. Двугранные углы $DBCA$, $DACB$, $DABC$ при основании пирамиды измеряются линейными углами.
2. $OM \perp BC$; $DM \perp BC$; $\angle DMO$ – линейный угол двугранного угла $DBCA$; $KO \perp AC$; $DK \perp AC$ $\angle DKO$ – линейный угол двугранного угла $DACB$.
3. $\Delta DMO = \Delta DKO = \Delta DFO$ (прямоугольные, так как DO – общий катет и по условию $\angle DMO = \angle DKO = \angle DFO$).
4. Из равенства треугольников следует $OM = OK = OF$. Точка O равноудалена от сторон ΔABC. Вывод O – центр окружности, вписанной в основание.

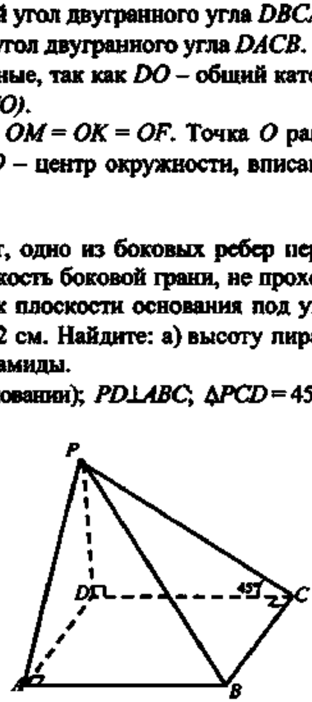
№ 242

Основанием пирамиды является квадрат, одно из боковых ребер перпендикулярно к плоскости основания. Плоскость боковой грани, не проходящей через высоту пирамиды, наклонена к плоскости основания под углом 45°. Набольшее боковое ребро равно 12 см. Найдите: а) высоту пирамиды; б) площадь боковой поверхности пирамиды.

Дано: $PABCD$ – пирамида (квадрат в основании); $PD \perp ABC$; $\Delta PCD = 45°$; $PB = 12$ см.

Найти: а) PD; $S_{бок.}$

Решение:



1. Боковая грань PCB образует с плоскостью $ABCD$ двугранный угол с общим ребром BC. $BC \perp DC$ ($ABCD$ – квадрат). $BC \perp PC$ (теорема о трех перпендикулярах). Следовательно, $\angle PCD$ – линейный, ΔPCB – прямоугольный.
2. ΔPDC – прямоугольный $PD \perp ABCD$; $DC = PD$, так как $\angle PCD = 45°$; Обозначим $DC = a$, получим $PD^2 + DC^2 = PC^2$; $a^2 + a^2 = PC^2$; $PC = a\sqrt{2}$.
3. ΔPCB – прямоугольный; $PB^2 = BC^2 + PC^2$; $12^2 = a^2 + 2a^2$; $a = 4\sqrt{3}$. Значит, $DC = DP = 4\sqrt{3}$, $PC = 4\sqrt{6}$.
4. $S_{бок.} = S_{\Delta ADP} + S_{\Delta CDP} + S_{\Delta BCP} + S_{\Delta APB}$; $\Delta ADP = \Delta CDP$ ($AD = DC$, DP – общая сторона); $S_{\Delta ADP} = \frac{1}{2} AD \cdot DP$; $S_{\Delta ADP} = \frac{1}{2} 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 24$ (см²).
5. $\Delta BAP = \Delta BCP$ ($AB = BC$, PB – общая); $S_{\Delta BAP} = \frac{1}{2} AP \cdot AB$; $S\Delta = \frac{1}{2} 4\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{3} = 24\sqrt{2}$ (см²).

6. $S_{бок.} = (24 + 24\sqrt{2}) \cdot 2 = 48(\sqrt{2} + 1)$ (см^2).

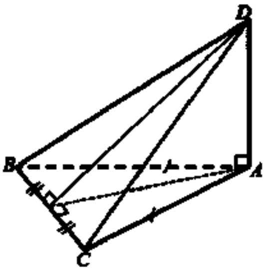
(*Ответ*: $4\sqrt{3}$ см; $48(\sqrt{2} + 1)$ см^2.)

IV. Подведение итогов

Домашнее задание

I уровень – п. 28, № 243, 240.

II уровень – п. 28, № 240, задача 1.



№ 243

Основанием пирамиды $DABC$ является треугольник ABC, у которого $AB = AC = 13$ см, $BC = 10$ см, ребро AD перпендикулярно к плоскости основания и равно 9 см. Найдите площадь боковой поверхности.

Дано: $DABC$ – пирамида; ΔABC – равнобедренный, $AB = AC = 13$см; $BC = 9$ см; $AD \perp ADC$, $AD = 9$ см.

Найти: $S_{бок.}$

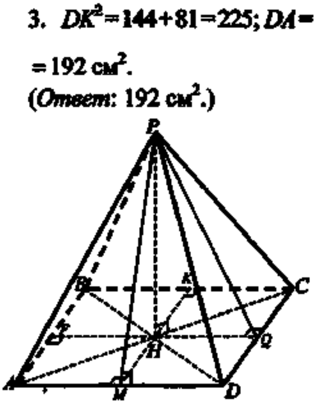
Решение:

1. $S_{бок.} = S_{\Delta DAC} + S_{\Delta DAB} + S_{\Delta DBC}$; $\Delta DAB = \Delta DAC$ (прямоугольные по условию); $AC = AB$, DA – общий катет. $S_{\Delta DAC} = \frac{1}{2} AC \cdot DA$; $S_{\Delta DAC} = S_{\Delta DAB} =$ $= \frac{1}{2} 13 \cdot 9 = \frac{117}{2}$ (см^2).

2. $S_{\Delta DBC} = \frac{1}{2} BC \cdot DK$; DK найдем из ΔDAK; $DK^2 = AK^2 + DA^2$; AK найдем из ΔCKA; $AK^2 = AC^2 - KC^2$; $KC = \frac{1}{2} BC$; $AK^2 = 13^2 - 5^2$; $AK = 12$.

3. $DK^2 = 144 + 81 = 225$; $DA = 15$; $S_{\Delta DBC} = 5 \cdot 15 = 75$ (см^2); $S_{бок.} = 2 \cdot 2\frac{117}{2} + 75 =$ $= 192$ см^2.

(*Ответ*: 192 см^2.)



№ 240

Основанием пирамиды является параллелограмм, стороны которого равны 20 см и 36 см, а площадь равна 360 см^2. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 12 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Дано: $PABCD$ – пирамида, $ABCD$ – параллелограмм; $AB = 20$ см; $AD = 36$ см; $S_{ABCD} = 360$ см^2; H – середина диагоналей AC и BD; $PH \perp ABCD$; $PH = 12$ см.

Найти: $S_{бок.}$

Решение:

1. $S_{бок.} = S_{\Delta APD} + S_{\Delta DPC} + S_{\Delta BPC} + S_{\Delta APB}$; $\Delta APD = \Delta BPC$; $AD = BC$ – противоположные стороны параллелограмма, $PD = PB$, из равенства BH и HD наклонные равны, если их проекции, проведенные из одной точки, равны. Треугольники равны по трем сторонам. $\Delta APB = \Delta DPC$ ($AB = DC$; $AP = PC$; $PD = CD$). Следовательно, $S_{бок.} = 2(S_{\Delta APD} + S_{\Delta DPC})$.
2. $S_{\Delta APD} = \dfrac{1}{2} AD \cdot PM$; PM найдем из ΔPHM; $PH = 12$ см; $HM = \dfrac{S_{ABCD}}{2AD}$;

   $HM = 5$ см; $PM^2 = PH^2 + HM^2$; $PM = \sqrt{12^2 + 25} = 13$ (см); $S_{\Delta ADP} = \dfrac{1}{2} 36 \cdot 13 =$

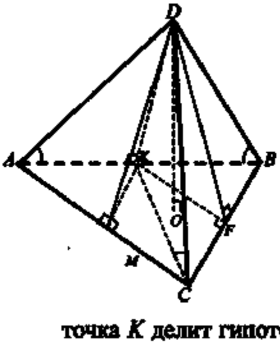
   $= 234$ (см^2).
3. $S_{\Delta DPC} = \dfrac{1}{2} DC \cdot PQ$; PQ из ΔPHQ; $PH = 12$ см; $HQ = \dfrac{S_{ABCD}}{2DC}$; $HQ = 9$ см;

   $PQ^2 = PH^2 + HQ^2$; $PQ = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$ (см); $S_{\Delta DPC} = \dfrac{1}{2} 20 \cdot 15 = 150$ (см^2).
4. $S_{бок.} = 2(234 + 150) = 2 \cdot 384 = 768$ (см^2).

(*Ответ*: 768 см^2.)

Задача 1

В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 10 см, 8см, 6 см. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найдите площадь полной поверхности.



Дано: $DABC$ – пирамида $AB = 10$ см, $BC = 6$ см, $AC = 8$ см. $\angle DAB = \angle DBA = \angle DCK = 45°$.

Найти: $S_{полн.}$.

Решение:

1. Так как ребра AD, BD, CD наклонены под одним углом к плоскости основания, то вершина проектируется в центр ΔABC, ΔABC – прямоугольный, так как его стороны пропорциональны числам 5, 4, 3. Центр треугольника – точка K делит гипотенузу на два равных отрезка $AK = KB$. По условию, $\angle DAB = \angle DBA = 45°$; ΔHDB прямоугольный равнобедренный, $DK = AK = KB = 5$ см.
2. $S_{полн.} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ADB} + S_{\Delta DBC} + S_{\Delta DCA}$; $S_{\Delta ABC} = \dfrac{BC \cdot AC}{2}$; $S_{\Delta ABC} = 24$ (см^2);

   $S_{\Delta ADB} = \dfrac{AB \cdot DK}{2} = 25$ см^2.
3. $S_{\Delta DBC} = \dfrac{1}{2} BC \cdot DF$; DF из ΔDKF (прямоугольный); $DF^2 = DK^2 + KF^2$;

   KF – средняя линия $KF = \dfrac{1}{2} AC$; $KF = 4$ см; $DF = \sqrt{41}$. $S_{\Delta DBC} =$

   $= \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{41} = 3\sqrt{41}$ (см^2).

4. $S_{\Delta DCA} = \frac{1}{2} AC \cdot DM$, DM найдем из прямоугольного треугольника DKM; $DM^2 = DK^2 + MK^2$; MK – средняя линия $MK = \frac{1}{2} BC$; $BC = 6$ см, $MK = 3$ см. $S_{\Delta DCA} = \frac{1}{2} 8 \cdot DM$; $DM = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$; $S_{\Delta DCA} = \frac{1}{2} 8 \cdot \sqrt{34} = 4\sqrt{34}$.
5. $S_{полн.} = 24 + 25 + 3\sqrt{41} + 4\sqrt{34} = 49 + 3\sqrt{41} + 4\sqrt{34}$ (см²).

(*Ответ*: $49 + 3\sqrt{41} + 4\sqrt{34}$ см²).

Урок 50. Правильная пирамида

Цели урока:

1) ввести понятие правильной пирамиды;
2) доказать теорему о площади боковой поверхности правильной пирамиды;
3) рассмотреть задачи, связанные с правильной пирамидой.

Ход урока

I. Проверка домашнего задания (собрать тетради)

II. Объяснения нового материала

Пирамида называется правильной, если в основании – правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину с центром основания, является ее высотой. Любое боковое ребро представляет собой гипотенузу прямоугольного треугольника, одним катетом которого служит высота пирамиды, а другим – радиус описанной окружности около основания (показать на модели). Следовательно, боковые ребра правильной пирамиды равны друг другу, а боковые грани – равнобедренные треугольники. Основания этих треугольников равны, так как в основании правильный многоугольник. Следовательно, боковые грани равны по третьему признаку равенства треугольников. Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из вершины, называется апофемой. Все апофемы правильной пирамиды равны друг другу.

Докажите теорему о площади боковой поверхности правильной пирамиды.

Теорема

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.

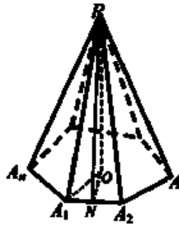
Дано: $PA_1A_2...A_n$ – правильная пирамида, PN – апофема.

Доказать: $S_{бок.} = \frac{1}{2} P_{осн.} \cdot PN$.

Доказательство: $S_{бок.} = S_{\Delta A_1PA_2} + S_{\Delta A_2PA_3} + ... + S_{\Delta A_nPA_1}$.

$\Delta A_1PA_2 = \Delta A_2PA_3 ... \Delta A_nPA_1$ (по определению правильной пирамиды). $S_{\Delta A_1PA_2} = \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot PN$; $S_{бок.} = \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot PN \cdot n =$

$= \frac{1}{2}(A_1A_2 \cdot n) \cdot PN$. $S_{б.прав.пир.} = \frac{1}{2} PN \cdot P_{осн.}$ Что и требовалось доказать.



III. Закрепление нового материала

Устная работа

1. Какая пирамида называется правильной?
2. Докажите, что боковые грани правильной пирамиды равные, боковые ребра равные.
3. Что называется апофемой?
4. Чему равна площадь боковой поверхности?

Решение задач № 254 (*а, б*), решают ученики у доски. № 264 – в сильном классе комментированием.

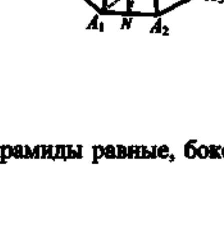
№ 254

В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна *а*, высота равна *Н*. Найдите: а) боковое ребро пирамиды; б) плоский угол при вершине пирамиды.

Дано: $DABC$ – пирамида, ΔABC – равносторонний, $AB = a$, $DO = H$.

Найти: а) DA; б) $\angle BDC$.

Решение:



1. Так как пирамида правильная, то $AD = BD = CD$. O – центр треугольника $AO = R$;

   $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$; $AO = \frac{a}{\sqrt{3}}$. ΔAOD – прямоугольный,

   OD – высота, $AD^2 = AO^2 + OD^2$; $AD = \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 + H^2} = \sqrt{\frac{a^2 + 3H^2}{3}}$;

2. ΔBDC – равнобедренный, DK – высота, ΔDKB – прямоугольный;

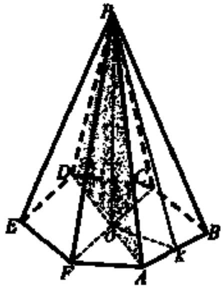
   $\sin\angle BDK = \frac{BK}{BD}$; $\sin\angle BDK = \frac{a}{2} : \frac{\sqrt{a^2 + 3H^2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2 + 3H^2}}$;

   $\angle BDK = \arcsin\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2 + 3H^2}}$; $\angle BDC = 2\arcsin\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2 + 3H^2}}$.

(*Ответ*: $\arcsin\frac{\sqrt{a^2 + 3H^2}}{3}$; $2\arcsin\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2 + 3H^2}}$.)

№ 264

Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды, если сторона основания равна *а*, а площадь боковой грани равна площади сечения, проведенного через вершину основания.



Дано: $MABCDEF$ – правильная шестиугольная пирамида $AB = a$, $S_{\Delta AMB} = S_{\Delta AMD}$.

Найти: $S_{бок.}$.

Решение: $S_{бок.} = 6 \cdot S_{\Delta AMB}$ (так как пирамида правильная), $S_{\Delta AMB} = \dfrac{1}{2} AB \cdot MK$. $S_{\Delta AMD} = \dfrac{1}{2} MO \cdot AD$, так как $S_{\Delta AMB} = S_{\Delta AMD}$, получим $\dfrac{1}{2} MO \cdot AD = \dfrac{1}{2} AB \cdot MK$; $AB = a$; $AD = 2a$; $\dfrac{1}{2} MO \cdot 2a = \dfrac{1}{2} a \cdot MK$; $MO = \dfrac{1}{2} MK$;

ΔMOK – прямоугольный, $\angle MKO = 30^\circ$, $\cos\angle MKO = \dfrac{KO}{MK}$; $MK = \dfrac{KO}{\cos 30^\circ}$;

ΔAKO: $AK = \dfrac{a}{2}$; $AO = a$; $OK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $MK = \dfrac{a\sqrt{3} \cdot 2}{2\sqrt{3}} = a$. $S_{\Delta AMB} = \dfrac{1}{2} a \cdot a = \dfrac{a^2}{2}$;

$S_{бок.} = 6\dfrac{a^2}{2} = 3a^2$.

(*Ответ*: $3a^2$.)

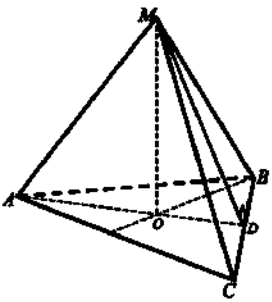
IV. Подведение итогов

Домашнее задание

I уровень а: п. 28, 29, № 255.

II уровень в: п. 28, 29, № 255, задача 1.

№ 255



В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 8 см, а плоский угол при вершине равен φ. Найдите высоту пирамиды.

Дано: $MABC$ – правильная пирамида. $AB = 8$ см; $\angle CMB = \varphi$.

Найти: MO.

Решение:

1) Так как пирамида правильная, O – центр треугольника $AO = R$; $OD = r$; $AO = 2OD$.

2) $AO = \dfrac{8}{\sqrt{3}}$; $OD = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$; ΔMOD: $MO^2 = MD^2 - OD^2$.

3) MD из ΔCDM – прямоугольный, $CD = \dfrac{1}{2} BC$, $\angle CMD = \dfrac{\varphi}{2}$.

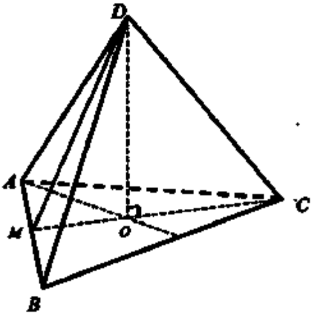
4) $\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{DC}{MD}$; $MD = 4 : \operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}$; $MD = \dfrac{4}{\operatorname{tg}\varphi/2}$;

$$MO = \sqrt{\left(\frac{4}{\operatorname{tg}\varphi/2}\right)^2 - \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2} = = \frac{4}{\operatorname{tg}\varphi/2}\sqrt{1-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\varphi/2}.$$

(*Ответ*: $\frac{4}{\operatorname{tg}\varphi/2}\sqrt{1-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\varphi/2}$.)

Задача

DABC – правильная треугольная пирамида, сторона основания которой $3\sqrt{3}$ см, а боковое ребро – 5 см. *MC* – медиана ΔABC. Найдите площадь ΔMDC.



Дано: *DABC* – правильная пирамида, $AB = 3\sqrt{3}$, $AD = 5$ см.

Найти: $S_{\Delta MDC}$.

Решение:

1. $S_{\Delta MDC} = \frac{1}{2} MC \cdot OD$, $MC = MO + OC$.
2. Так как пирамида правильная, O – центр треугольника, $OC = R$; $MO = r$; $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$; $OC = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3$; $OM = \frac{R}{2}$; $OM = \frac{3}{2} = 1{,}5$; $MC = 4{,}5$.
3. ΔDOC – прямоугольный; $DO^2 = DC^2 - OC^2$; $OD = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$ (см).
4. $S_{\Delta MDC} = \frac{1}{2} 4{,}5 \cdot 4 = 9$ (см^2).

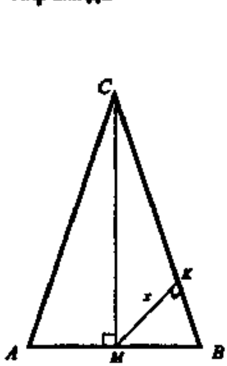
(*Ответ*: 9 см^2.)

Плакаты № 1, 2, 3, 4, рекомендуемые к урокам № 51, 52, 53 (см. приложение).

Урок 51. Решение задач по теме «Пирамида»

Цель урока:

– рассмотреть задачи на вычисление площади поверхности произвольной пирамиды.



Ход урока

I. Актуализация знаний

Проверка знаний.

1) Один ученик доказывает теорему.

2) Один ученик у доски решает задачу по планиметрии.

Дано: ΔABC – правильный, AB = 3.

Найти: 1) h; 2) r; 3) R; 4) S; 5) x (см. рисунок).

Решение:

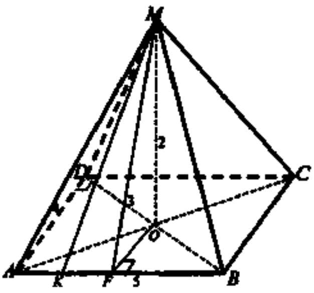
1. Пусть ΔABC данный треугольник; $AB = 3$. CM – высота; $CM = AC \cdot \sin A = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.
2. $r = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
3. $\sqrt{3} = R$;
4. $S = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}$;
5. $MK = MB \cdot \sin 60° = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

(*Ответ*: 1) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$; 2) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sqrt{3}$; 4) $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$; 5) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.)

Остальные отвечают на вопросы: – Что называется пирамидой? Правильной пирамидой? Что называется площадью боковой поверхности пирамиды? Что называется площадью полной поверхности пирамиды? Чему равна площадь боковой поверхности правильной пирамиды? Как найти радиусы вписанной и описанной окружностей для произвольного треугольника? Формула для площади треугольника?

II. Решение задач

№ 241 **(фронтальная работа)**



Дано: $MADCB$ – пирамида. $AB = 5$ (м), $AD = 4$ (м), $DB = 3$ (м), $MO = 2$ (м).

Найти: $S_{пир.}$.

Решение:

1. Пусть $AB = 5$ м, $AD = 4$ м, $BD = 3$ м. Заметим, что ΔABD – прямоугольный; $\angle ADB = 90°$; $AD \perp DO$ следовательно, по теореме о трех перпендикулярах, $AD \perp MD$, то есть MD является высотой грани MAD.
2. Из ΔMDO получаем: $MD = \sqrt{2^2 + 1{,}5^2} - \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$.
3. Из ΔADB имеем $DK \perp AB$, $AB \cdot DK = AD \cdot BD$, $5 \cdot DK = 4 \cdot 3$, $DK = \dfrac{12}{5}$.

   Из ΔMOF получаем: $OF \| DK$, $OF = \dfrac{1}{2} DK$, $OF = \dfrac{6}{5}$;

   $MF = \sqrt{MO^2 + OF^2} = \sqrt{4 + \dfrac{36}{25}} = \sqrt{\dfrac{136}{25}} = \dfrac{2\sqrt{34}}{5}$.
4. $S_{бок} = 2S_{\Delta AMD} + S_{\Delta AMB} = 4 \cdot 2{,}5 + 5\dfrac{2\sqrt{34}}{5} = 10 + 2\sqrt{34}$ (см);

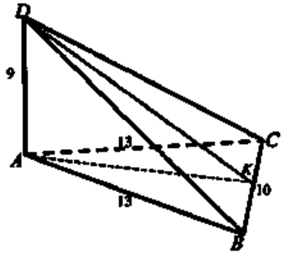
$S_{осн.} = 4 \cdot 3 = 12$; $S_{пр.} = S_{полн.}$; $S_{пир.} = 22 + 2\sqrt{34}$ (м^2).

(*Ответ*: $S_{пир.} = 22 + 2\sqrt{34}$ м^2.)

№ 243. Дано: *DACB* – пирамида; ΔACB – треугольник; $AB = AC = 13$ см; $BC = 10$ см; $AD \perp ABC$; $AD = 9$ см.

Найти: $S_{бок.}$

Решение:



1. Проведем $AK \perp BC$, тогда $BC \perp DK$ (по теореме о трех перпендикулярах), то есть DK – высота ΔDBC.
2. Из ΔABK получаем: $K = \sqrt{AB^2 - BK^2} =$
$= \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$ (см).
3. Из ΔDAK имеем: $DK = \sqrt{DA^2 + AK^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15$ (см).
4. Из $\Delta ADB = \Delta ADC$ (по двум катетам); $S_{бок.} = 2S_{\Delta ADB} + S_{\Delta BDC}$; $S_{бок.} = 13 \cdot 9 + 5 \cdot 15 = 117 + 75 = 192$ (см^2).

(*Ответ*: 192 см^2.)

IV. Подведение итогов

Домашнее задание

П. 30, п. 29, п. 28.

Задача (1), № 239.

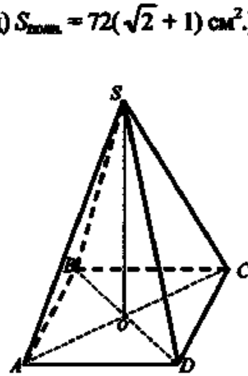
I уровень

Задача (1), № 239

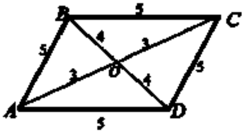
Апофема правильной четырехугольной пирамиды 6 см, высота пирамиды равна $3\sqrt{2}$ см. Найдите: а) сторону основания пирамиды; б) угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды; в) угол, образованный боковым ребром и плоскостью основания пирамиды; г) площадь боковой поверхности пирамиды; д) площадь полной поверхности пирамиды. (*Ответы*: а) $6\sqrt{2}$; б) 45°; в) $a = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; г) $S_{бок.} = 72\sqrt{2}$ см^2; д) $S_{полн.} = 72(\sqrt{2} + 1)$ см^2.)

№ 239. Дано: S_{ABCD} – пирамида; *ABCD* – ромб; $AB = CD = BC = = AD = 5$ см; $BD = 8$ см; $SO = 7$ см.

Найти: AS.



Решение: Пусть *SABCD* данная пирамида. *ABCD* ромб (по условию задачи). Точка пересечения диагоналей является центром ромба *ABCD*. *O* – центр ромба. Следовательно, пирамида является правильной. По свойству диагоналей ромба: $DO = BO = 4$ см. $AO = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{3}$ (см). Из ΔASO, по теореме Пифагора, имеем $AS = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{7^2 + 3^2} = \sqrt{49 + 9} = \sqrt{58}$ (см); $SA = SC$, как наклонные, имеющие одинаковые проекции. Аналогично из ΔSDO по теореме Пифагора имеем $SD=\sqrt{SO^2+OD^2}=\sqrt{7^2+4^2}=\sqrt{49+16}=\sqrt{65}$ (см); $SB=SD$ – как наклонные, имеющие одинаковые проекции. (*Ответ*: $\sqrt{58}$ см, $\sqrt{58}$ см, $\sqrt{65}$ см, $\sqrt{65}$ см.)

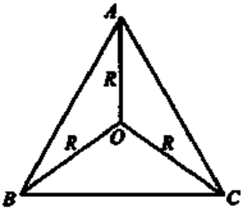


II уровень

№ 250, задача (1)

Дано: ΔABC; $DABC$ – пирамида; $\angle CAB=120°$; $DO=16$ см; $\angle DAO=45°$.

Найти: S_{ABC}.



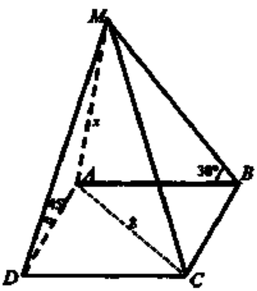
Решение: Основание высоты пирамиды соединяем с вершинами ΔABC. $\Delta DOA=\Delta DOB=$ $=\Delta DOC$ – прямоугольный и равный по катету, DO и углам при вершине D (45°). Тогда $AO=OC=OB=OD=16$ (см).

По теореме синусов имеем: $\dfrac{BC}{\sin 120°}=2R$; $\dfrac{BC}{\sin 60°}=2\cdot 16=32$; $BC=\dfrac{32\sqrt{3}}{2}=16\sqrt{3}$ (см); $\dfrac{AB}{\sin 20°}=2R=32$; $AB=\dfrac{32}{2}=16$ (см); $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot$ $\cdot AB\cdot AC\sin 120°$; $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{16\cdot 16\sqrt{3}}{2}=64\sqrt{3}$ (см^2).

(*Ответ*: $64\sqrt{3}$ см^2.)

III уровень

№ 245, задача (1)



Дано: $MABCD$ – пирамида, $ABCD$ – прямоугольник, $AC=8$ см, $\angle MDA=45°$, $\angle MBA=30°$.

Найти: $S_{пир.}$.

Решение:

1. Предположим, что плоскости (MAB) и (MHD) перпендикулярны к плоскости основания, тогда линия их пересечения MA перпендикулярна к плоскости основания, то есть MA – высота пирамиды. Так как $CB\perp AB$, то $CB\perp MB$ по теореме о трех перпендикулярах, поэтому $\angle MBA$ – линейный угол двугранного угла при ребре BC, $\angle MBA=30°$.
2. Аналогично $AD\perp DC$, $MD\perp DC$, $\angle MDA$ – линейный угол двугранного угла при ребре DC, $\angle MDA=45°$. Треугольники MBC и MDC прямоугольные.
3. Пусть $MA=x$ см, тогда $MB=2x$ см, $AB=x\sqrt{3}$ см. Из ΔMAD имеем: $MA=AD=x$ см, $MD=x\sqrt{2}$ см. Из ΔABC получаем: $AB^2+BC^2=AC^2$; $3x^2+x^2=64$, $x^2=16$, $x=4$ (см). $S_{бок.}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AM+\dfrac{1}{2}AD\cdot AM+$

$+\frac{1}{2}BC\cdot BM+\frac{1}{2}DC\cdot DM=\frac{1}{2}4\sqrt{3}\cdot 4+\frac{1}{2}4\cdot 4+\frac{1}{2}4\cdot 8+\frac{1}{2}4\sqrt{3}\cdot 4\cdot$
$\cdot\sqrt{2}=24+8\sqrt{3}+8\sqrt{6}.$ $S_{осн.}=4\sqrt{3}\cdot 4=16\sqrt{3}$; $S_{пир.}=24+24\sqrt{3}+$
$+8\sqrt{6}=8(3+3\sqrt{3}+\sqrt{6})$ (см^2).

(*Ответ*: $8(3+3\sqrt{3}+\sqrt{6})$ см^2.)

Урок 52. Решение задач по теме «Пирамида» Самостоятельная работа

Цели урока:

1) закрепить навыки решения задач о пирамидах;
2) провести самостоятельную работу на вычисление элементов и площади поверхности правильной пирамиды.

Ход урока

I. Организационный момент

Собрать тетради с домашней работой для проверки.

II. Самостоятельная работа

(контролирующая)

Вариант I

I задача

Высота правильной треугольной пирамиды равна $a\sqrt{3}$; радиус окружности, описанной около ее основания, $2a$. Найдите: а) апофему пирамиды; б) угол между боковой гранью и основанием; в) площадь боковой поверхности; г) плоский угол при вершине пирамиды.

I уровень

Основание пирамиды – прямоугольник со сторонами 6 и 8 см. Высота пирамиды равна 12 см и проходит через точку пересечения диагоналей основания. Найдите боковые ребра пирамиды.

II уровень

В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 6 см, а угол наклона боковой грани к плоскости основания равен 60°. Найдите боковое ребро пирамиды.

III уровень

Основанием пирамиды является треугольник со сторонами 12 см, 10 см, 10 см. Каждая боковая грань наклонена к основанию под углом 45°. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Вариант II

I задача

Апофема правильной четырехугольной пирамиды равна $2a$. Высота пирамиды равна $a\sqrt{3}$. Найдите: а)°сторону основания пирамиды; б)° угол между боковой гранью и основанием; в) площадь поверхности пирамиды; г) расстояние от центра основания пирамиды до плоскости боковой грани.

I уровень

Основание пирамиды – ромб с диагоналями 10 и 18 см. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба. Меньшее боковое ребро пирамиды равно 13 см. Найдите большее боковое ребро пирамиды.

II уровень

Основанием пирамиды *DABC* является прямоугольный треугольник *ABC*, у которого гипотенуза *AB* равна 29 см, катет *AC* равен 21 см. Ребро *DA* перпендикулярно к плоскости основания и равно 20 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

III уровень

Основанием пирамиды является треугольник со сторонами 10 см, 8 см, 6 см. Каждая боковая грань наклонена к основанию под углом 45°. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

III. Подведение итогов

Дома: поменяться вариантами.

Вариант I

I задача

1. Ответ: 1) $2a$; б) 60°; в) $6a^2\sqrt{3}$ г) $2\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

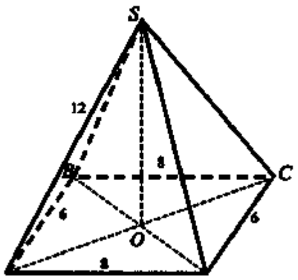


Рис. 1

I уровень

Дано: $SABCD$ – пирамида; $ABCD$ – прямоугольник; $SO = 12$ (см); $AB = 6$ (см); $BC = 8$ (см) (рис. 1).

Найти: SD.

Решение: Пусть $SABCD$ данная пирамида, $SO \perp ABCD$. ΔABD – прямоугольный. По теореме Пифагора получим: $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$ (см); $BO=OD=5$ (см); ΔSOD – прямоугольный треугольник. $SD=\sqrt{SO^2+OD^2}=\sqrt{12^2+5^2}=$ $=\sqrt{144+25}=\sqrt{169}=13$ (см). (*Ответ*: $SD =$ $= 13$ см.)

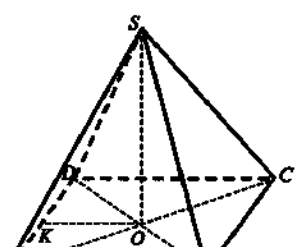


Рис. 2

II уровень

Дано: $SABCD$ – пирамида; $AB = DC = CB =$ $= AB = 6$ см; $\angle SKO = 60°$ (рис. 2).

Найти: SA.

Решение: Пусть $SABCD$ данная пирамида; $OK=\frac{1}{2}AB=\frac{6}{2}=3$ (см). Из ΔOKS (прямоугольный) имеем: $KS=\frac{OK}{\sin 30°}=2\cdot 3=6$ (см);

$AK = \frac{1}{2}DA = 3$ (см). Из ΔAKS по теореме Пифагора имеем: $AS = \sqrt{KS^2 + KA^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ (см). Так как в правильной пирамиде все боковые ребра равны, то $SA = SB = SC = = SD = 3\sqrt{5}$ (см). (*Ответ*: $3\sqrt{5}$ см.)

III уровень

Дано: $DABC$ – пирамида; $AC = 12$ (см); $CB = 10$ (см); $AB = 10$ (см); $\angle DMO = 45°$; $\angle DMO = \angle DKO = \angle DNO$ (рис. 3).

Найти: $S_{пол.}$.

Решение: Пусть $DABC$ – данная пирамида. DO – высота. Построим $OM \perp AB$, $ON \perp AC$, $OK \perp BC$. Из теоремы о 3-х перпендикулярах следует, что $DM \perp AB$, $DK \perp BC$, $DN \perp AC$. Пусть $\angle DMO$, $\angle DKO$, $\angle DNO$ – линейные углы двугранных углов боковых граней с плоскостью основания. По условию $\angle DMO = \angle DKO = \angle DNO = 45°$. Тогда $\Delta DMO = \Delta DKO = \Delta DNO$ по катету и острому углу, из равенства треугольников следует: $MO = OK = ON = r$, $DM = = DK = DN$; r – радиус вписанной в ΔABC окружности, $OM = DO$, так как ΔMOD – равнобедренный.

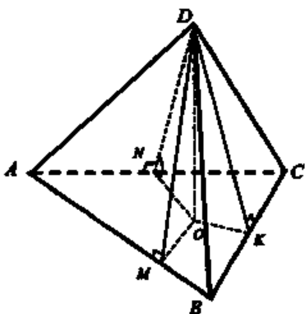


Рис. 3

$S = \sqrt{p \cdot (p-10) \cdot (p-10) \cdot (p-12)}$;

$r = \frac{S}{p}$, $P = \frac{12+10+10}{2} = 16$ (см);

$S = \sqrt{16 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4} = 4 \cdot 6 \cdot 2 = 48$ (см^2); $r = \frac{48}{16} = 3$ (см). То есть $OM = DO = 3$ см, $DM = 3\sqrt{2}$ см. $S_{бок} = S_{ADC} + S_{ADB} + S_{BCD}$, $S_{бок} = \frac{1}{2}AC. DN + \frac{1}{2}AB \cdot DM + + \frac{1}{2}BC \cdot DK = \frac{1}{2}\ DM \cdot (AC + CB + BA) = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 32 = 16 \cdot 3\sqrt{2} = 48\sqrt{2}$ (см^2).

$S_{пол} = S_{осн} + S_{бок}$. $S_{пол} = 48 + 48\sqrt{2} = 48\,(1 + \sqrt{2})$ (см^2). (*Ответ*: $S_{пол} = 48 \cdot \cdot (1 + \sqrt{2})$ см^2.)

Вариант II

1 задача

(*Ответ*: а) $2a\sqrt{2}$; б) 45°; в) $8a^2(\sqrt{2} + 1)$; г) a.)

I уровень

Дано: $SABCD$ – пирамида; $ABCD$ – ромб; $AC = 18$ (см); $BD = 10$ (см); $SO \perp ABCD$; $SD = 13$ (см) (рис. 4).

Найти: SC.

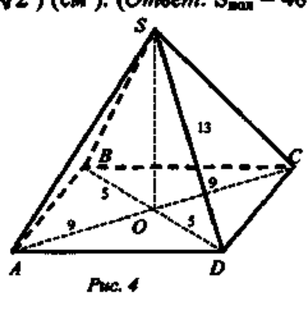


Рис. 4

Решение: Пусть $SABCD$ – данная пирамида. $SO=\sqrt{SD^2-OD^2}=\sqrt{13^2-5^2}=$ $=\sqrt{169-25}=\sqrt{144}=12$ (см). По теореме Пифагора, ΔSOD, ΔSOC – прямоугольные треугольники. $SC=\sqrt{SO^2-CO^2}=\sqrt{12^2-9^2}=\sqrt{144+81}=$ $\sqrt{225}=15$ (см). (*Ответ*: $SC=15$ см.)

II уровень

Дано: $ABCD$ – пирамида; $AB=29$ (см); $AC=21$ (см); $DA\perp ABC$; $DA=20$ (см) (рис. 5).

Найти: $S_{бок.}$.

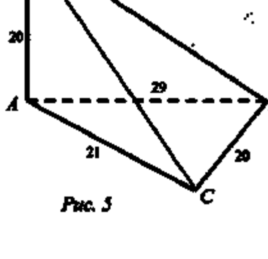


Рис. 5

Пусть $DABC$ данная пирамида. Так как $DA\perp BC$, $AC\perp BC$, то по теореме о 3-х перпендикулярах $DC\perp CB$. По теореме Пифагора имеем: $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{29^2-21^2}=$ $=20$ (см); $DC=$ $\sqrt{AD^2+AC^2}=\sqrt{20^2+21^2}==29$ (см). $S_{бок}=S_{APC}+S_{APB}+S_{DCB}$. $S_{ADC}==\frac{1}{2}AD\cdot AC=$ $=\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 21=210$ (см2). $S_{ADB}=\frac{1}{2}AD\cdot AB=\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 29=290$ (см^2). $S_{DCB}=$ $=\frac{1}{2}DC\cdot CB=\frac{1}{2}\cdot 29\cdot 20=290$ (см^2). $S_{бок}=210+2\cdot 290=210+580=790$ (см^2). (*Ответ*: $S_{бок}=790$ см^2.)

III уровень

Дано: $DABC$ – пирамида, $AC=10$ (см); $AB=8$ (см); $BC=6$ (см). $\angle DMO=45°$ (рис. 6)

Найти: $S_{пол}$.

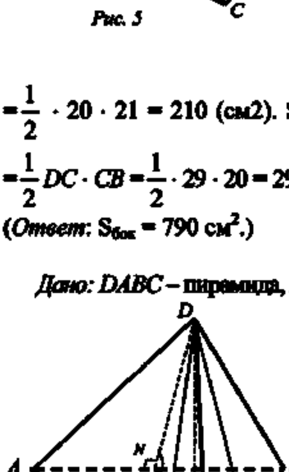


Рис. 6

Решение: Пусть $DABC$ данная пирамида. DO – высота. Построим $OM\perp AB$, $ON\perp AC$, $OK\perp BC$. Из теоремы о 3-х перпендикулярах следует, что $DM\perp AB$, $DK\perp BC$, $DN\perp AC$. Пусть $\angle DMO$, $\angle DKO$, $\angle DNO$ – линейные углы двугранных углов боковых граней с плоскостью основания. По условию $\angle DMO==\angle DKO=\angle DNO=45°$. Тогда $\Delta DMO=\Delta DKO=\Delta DNO$ по катету и острому углу, из равенства треугольников следует: $MO=OK=ON=r$, $DM=DK=DN$; r – радиус вписанной в ΔABC окружности, $OM=DO$, так как ΔMOD – равнобедренный. $S=\sqrt{p\cdot(p-10)\cdot(p-8)\cdot(p-6)}$; $r=\frac{S}{p}$,

$p=\frac{10+8+6}{2}=12$ (см). $S=\sqrt{12\cdot(12-10)\cdot(12-8)\cdot(12-6)}=\sqrt{12\cdot 2\cdot 4\cdot 6}=24$ (см^2);

$r = \dfrac{24}{12} = 2$ (см); $OM = DO = 2$ см. $DM = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ (см);

$S_{бок} = S_{ADC} + S_{ADB} + S_{BCD}$. $S_{бок} = \dfrac{1}{2}AC \cdot DN + \dfrac{1}{2}AB \cdot DM + \dfrac{1}{2}BC \cdot DK =$

$= \dfrac{1}{2}DM(AC + AB + BC) = \dfrac{1}{2}\,2\sqrt{2}\,(10 + 8 + 6) = \sqrt{2} \cdot 24 = 24\sqrt{2}$ см^2. $S_{пол.} =$

$= S_{осн} + S_{бок}$. $S_{пол} = 24 + 24\sqrt{2} = 24 \cdot (1 + \sqrt{2})$ (см^2) (*Ответ*: $S_{пол} = 24 \cdot (1 +$
$+ \sqrt{2})$ см^2.)

Урок 53. Усеченная пирамида. Площади поверхности усеченной пирамиды

Ход урока

I. Организационный момент

Собрать тетради с домашней работой для проверки.

II. Анализ самостоятельной работы

Подводятся итоги самостоятельной работы, решения показываются с помощью кодоскопа или записываются на доске.

III. Актуализация знаний (плакат № 1, плакат № 2)

(Вопросы задает учитель).

1. Что называется пирамидой? Правильной пирамидой?
2. Что называется площадью боковой поверхности пирамиды?
3. Что называется площадью полной поверхности пирамиды?
4. Что называется трапецией? Равнобедренной? Прямоугольной?

Как найти площадь трапеции?

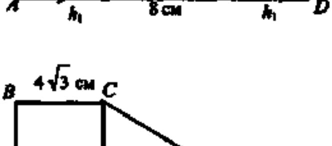
6. Устно решите задачи (а, б) (рисунки на плакате)

Дано: ABCD – трапеция; $\angle BAD = 45°$.
$BC = 6$ см, $AD = 8$ см.

Найти: S – ?

Решение: $h = (8 - 6) : 2 = 1$ (см);
$h = h_1 \cdot \mathrm{tg}45° = 1$ (см); $h = h_1 = 1$ (см).

$S = \dfrac{1}{2}(8 + 6) \cdot 1 = 7$ (см^2). (*Ответ*: $S = 7$ см^2)



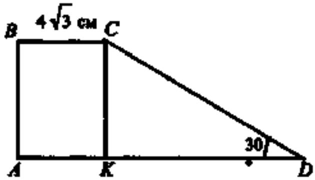
Задача 2 (устно)

Дано: ABCD – трапеция. *ABCK* – квадрат. $BC = 4\sqrt{3}$ см. $\angle CDK = 30°$.

Найти: AD – ?

Решение: $AK = 4\sqrt{3}$ см, $AK = BC =$

$= CK = 4\sqrt{3}$ см; $KD = \dfrac{EK}{\mathrm{tg}30°} = \dfrac{4\sqrt{3}}{1/\sqrt{3}} = 12$



см; $AD = (4\sqrt{3} + 12)$ (см). (*Ответ*: $AD = (12 + 4\sqrt{3})$ см.)

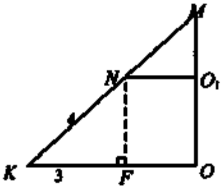
IV. Постановка целей и мотивации темы урока

Учитель показывает иллюстрации с изображением церкви и других строений, одна из частей которых – пирамида.

V. Объяснение темы

Задание (вызывается ученик к доске).

Изобразить произвольную пирамиду $PA_1A_2 \dots A_n$ (ученик работает на доске, класс в тетрадях). Учитель: «Возьмем произвольную пирамиду



$PA_1A_2 \dots A_n$ и проведем секущую плоскость β, параллельно плоскости α основания пирамиды и пересекающую боковые ребра в точках $B_1, B_2, \dots B_n$. Плоскость β разбивает пирамиду на два многогранника. Многогранник, гранями которого являются n-угольники $A_1A_2, \dots A_n$ и $B_1B_2, \dots B_n$ (нижнее и верхнее основания), расположенные в параллельных плоскостях, и n-четырехугольников $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, … $A_nA_1B_1B_n$ (боковые грани), называется усеченной пирамидой.

Отрезки A_1B_1, A_2B_2, … A_nB_n называются боковыми ребрами усеченной пирамиды. Усеченную пирамиду с основаниями $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ обозначают так: $A_1A_2 \dots A_n\ B_1B_2 \dots B_n$. Перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется высотой усеченной пирамиды».

По рис. 76 (стр. 64 учебника) назовите верхнее и нижнее основания, боковые грани и ребра усеченной пирамиды, высоту усеченной пирамиды.

Вопрос: Докажите, что боковая грань усеченной пирамиды – трапеция? $A_1A_2B_2B_1$ – трапеция ($A_1B_1 \parallel A_2B_2$).

Усеченная пирамида называется правильной, если она получена сечением правильной пирамиды плоскостью, параллельной основанию. Основания правильной усеченной пирамиды – правильные многоугольники, а боковые грани – равнобедренные трапеции. Высоты этих трапеций называются апофемами. Как найти сумму площадей ее боковых граней?

Площадью боковой поверхности усеченной пирамиды называется сумма площадей ее боковых граней.

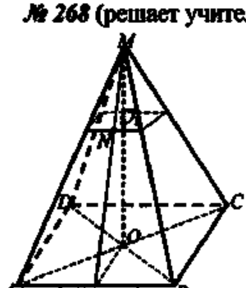
$S_{бок.} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2) \cdot h$, где p_1 и p_2 периметры оснований, h – апофема.

Теорема

Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему

VI. Решение задач

№ 268 (решает учитель)



Дано: $MABCD$ – правильная пирамида, $A_1B_1C_1 \parallel ABC$, $MO_1 : O_1O = 1:2$, NK – апофема, $NK = 4$ дм, $S_{ус.пир.} = 186$ дм^2

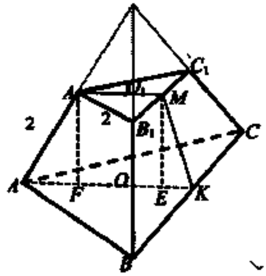
Найти: OO_1 – ?

Решение: Рассмотрите ΔMKO. Так как $NO_1 \parallel KO$, то $MO_1 : MO = = O_1N : OK$, значит, стороны $B_1C_1 : BC = MO_1 : MO$. $B_1C_1 = 1:3$. Пусть $B_1C_1 = x$, $BC = 3x$. Имеем $S_{бок.} = \frac{1}{2}(4x + 12x) \cdot 4$. $S_{осн.} = x^2 + 9x^2 = 10x^2$, $S_{полн.} = 10x^2 + 32 = 186$, $5x_2 + 16x - 93 = 0$. $D = = 256 + 1860 = 2116$, $D > 0$.

$x_1 = \frac{-16+46}{10} = 3$, $x_2 = \frac{-16-46}{10} = \frac{-62}{10} = -6{,}2$ (не удовлетворяет условию задачи); $B_1C_1 = 3$ (см), $NO = 1{,}5$ (см); $BC = 9$ (см), $OK = 4{,}5$ (см); $KF = OK - NO_1 = 3$. Из ΔKNF по теореме Пифагора $NF = OO_1 = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$ (дм) (*Ответ*: $\sqrt{7}$ дм.)

№ 269. *Дано:* $ABCA_1B_1C_1$ – усеченная пирамида. $AB = BC = AC = 4$ см; $A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1 = 2$ см; $AA_1 = 2$ см.

Найти: MK – ? A_1F_1 – ?



Решение: Пусть O и O_1 – центры оснований пирамиды.

1) Из ΔABC имеем: $AB = R\sqrt{3}$, $R = AO$. $AO = \frac{4}{\sqrt{3}}$ дм, $OK = \frac{1}{2}\ AO = \frac{2}{\sqrt{3}}$ дм.

2) Из $\Delta A_1B_1C_1$ находим $A_1O = \frac{2}{\sqrt{3}}$ дм, $O_1M = \frac{1}{\sqrt{3}}$ дм.

3) $EK = OK - OE$, $OE = O_1M$, отсюда $EK = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ дм.

4) Из ΔAA_1F имеем: $FA = AO - FO$, $FO = A_1O$, $AF = \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ дм.

$A_1F = \sqrt{AA_1^2 - AF^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ дм.

5) Из ΔMEK имеем: $MK = \sqrt{ME^2 + EK^2} = \sqrt{3}$ дм.

(*Ответ*: $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ дм, $\sqrt{3}$ дм.)

VII. Подведение итогов

Домашнее задание

Тест (В–1), (В–2).

Тест (см. приложение)

Оценка ставится в зависимости от суммы баллов, набранных учеником, причем правильный ответ оценивается в 2 балла, неправильный – в 1, ответ «не знаю» оценивается в 0 баллов.

Примерная шкала оценок.

Оценки: 3 4 5

Баллы: 3–7 8–10 12

Ответы	1	2	3	4	5	6
Вариант I	в	г	в	б	б	в
Вариант II	в	а	г	б	б	г

§ 3. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

(уроки 54–56)

Урок 54. Симметрия в пространстве. Понятие правильного многогранника. Элементы симметрии правильных многогранников

Цели урока:

1) ознакомить учащихся с симметрией в пространстве;
2) ввести понятие «правильного многогранника»;
3) рассмотреть все пять видов правильных многогранников;
4) решение задач с правильными многогранниками.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Проверка домашнего задания

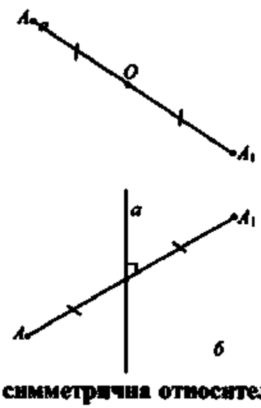
Проверить домашний тест по теме «Пирамида».

Проанализировать ошибки домашнего задания.

III. Изучение нового материала

1) Учитель вводит понятия симметричных точек относительно точки, прямой и плоскости.

а) Точки A и A_1 **называются симметричными относительно точки O (центр симметрии)**, если О – середина отрезка AA_1. Точка O считается симметричной самой себе.

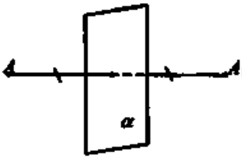


Точки A и A_1 называются **симметричными относительно прямой a (ось симметрии)**, если прямая a проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к этому отрезку. Каждая точка прямой a считается симметричной самой себе.

Точки A и A_1 называются **симметричными относительно плоскости α (плоскость симметрии)**, если плоскость α проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к этому отрезку. Каждая точка плоскости α считается симметричной самой себе.

а) **Итак, точка называется центром симметрии фигуры, если каждая точка фигуры симметрична относительно нее некоторой точке той же фигуры.** Если фигура имеет центр симметрии, то говорят, что она обладает **центральной симметрией.**

б) **Прямая называется осью симметрии фигуры, если каждая точка фигуры симметрична относительно нее некоторой точке той же фигуры.** Если фигура имеет ось симметрии, то говорят, что она обладает **осевой симметрией.**



в) **Плоскость называется плоскостью симметрии фигуры, если каждая точка фигуры симметрична относительно нее некоторой точке той же фигуры.** Если фигура имеет плоскость симметрии, то говорят, что она обладает **зеркальной симметрией.**

Рисунки 78–80 учебника дают наглядное представление о рассматриваемых понятиях.

2) Понятие правильного многогранника

Выпуклый многогранник называется правильным, если все его грани – равные правильные многоугольники и в каждой его вершине сходится одно и то же число ребер.

Вопросы классу:

1) Какие вы знаете правильные многогранники?

2) Какие 2 условия определяют правильный многогранник?

3) Сколько может быть видов правильных многогранников?

На последний вопрос учитель отвечает вместе с учениками. Пусть при одной вершине сходится n ребер, тогда плоских углов при этой вершине будет тоже n, причем они все равны между собой. Пусть один из этих плоских углов равен α, тогда сумма плоских углов при вершине $n \cdot \alpha$, и по свойству плоских углов многогранного угла получим $n \cdot \alpha < 360°$, откуда $\alpha < \dfrac{360°}{n}$.

Угол правильного n-угольника равен $\beta = \dfrac{180°(n-2)}{n}$. Начиная с n = 7 плоский угол станет меньше 60°, а такого правильного многоугольника не существует.

1) Грани правильного многогранника – **правильные треугольники,** тогда $\beta = 60°$.
   а) $60° \cdot 3 = 180° < 360°$. В этом случае правильный многогранник имеет 4 грани и называется **правильным тетраэдром** (рис. 81 учебника).
   б) $60° \cdot 4 = 240° < 360°$. В этом случае правильный многогранник имеет 8 граней и называется **правильным октаэдром** (рис. 82 учебника).
   в) $60° \cdot 5 = 300° < 360°$. В этом случае правильный многогранник имеет 20 граней и называется **правильным икосаэдром** (рис. 83 учебника).
   г) $60° \cdot 6 = 360°$, это противоречит свойству о сумме плоских углов многогранного угла. Следовательно, больше правильных многогранников, грани которых – правильные треугольники, не существует.
2) Грани правильного многогранника – правильные четырехугольники (квадраты), тогда $\beta = 90°$.

а) $90° \cdot 3 = 270° < 360°$. В этом случае правильный многогранник имеет 6 граней и называется **правильным гексаэдром (кубом)** (рис. 84 учебника).

б) $90° \cdot 4 = 360°$, следовательно, больше правильных многогранников, грани которых квадраты, не существует.

3) Грани правильного многогранника – правильные пятиугольники, $\beta = 108°$.

а) $108° \cdot 3 = 324° < 360°$. В этом случае правильный многогранник имеет 12 граней и называется **правильным додекаэдром** (рис. 85 учебника).

б) $108° \cdot 4 > 360°$, следовательно, больше правильных многогранников, грани которых – правильные пятиугольники, не существует.

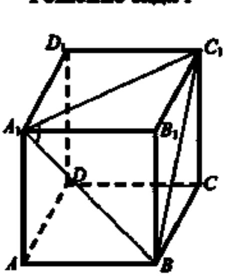
4) Начиная с правильного шестиугольника $\beta \geq 120°$. Следовательно, $n \cdot \beta > 360°$ $(n \geq 3)$, поэтому правильных многогранников, грани которых – многоугольники с числом сторон больше 5, не существует.

Во время беседы учитель демонстрирует модели правильных многогранников, показывает рисунки параграфа.

Все эти типы многогранников были известны в Древней Греции – именно им посвящена завершающая, XIII книга «Начал» Евклида. Их называют также «платоновыми телами» – они занимали видное место в идеалистической картине мира древнегреческого философа Платона. Четыре из них олицетворяют в ней четыре «сущности», или «стихии»: тетраэдр – огонь, икосаэдр – воду, куб – землю, октаэдр – воздух. Пятый же многогранник, додекаэдр, воплощая в себе «все сущее», символизировал все мироздание, почитался главнейшим. Уже по-латыни в средние века его стали называть «пятая сущность» или quinta essentia, «квинта эссенция», отсюда происходит слово «квинтэссенция», означающее все самое главное, основное, истинную сущность чего-либо.

Элементы симметрии правильных многогранников учащиеся определяют самостоятельно по рисункам 81–87 учебника.

Решение задач



№ 279 (решается самостоятельно с последующей проверкой у доски).

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. A_1B и A_1C_1 – диагонали граней куба, имеющие общий конец.

Найти: $\angle BA_1C_1$.

Решение:

1) Пусть a – ребро куба. Так как все грани куба – равные квадраты, то диагонали граней равны $A_1B = A_1C_1 = BC_1 = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$.

2) $\Delta A_1B_1C_1$ – равносторонний, значит, $\angle BA_1C_1 = 60°$.

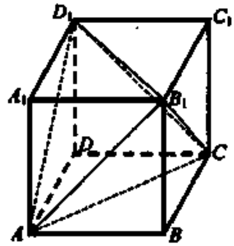
(*Ответ*: 60°.)

№ 281 (для решения ученик вызывается к доске).

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. D_1A, D_1C, D_1B – диагонали граней.

Доказать: D_1AB_1C – правильный тетраэдр.

Найти: $\dfrac{S_{\text{куба}}}{S_{\text{тетраэдра}}}$.



Решение:

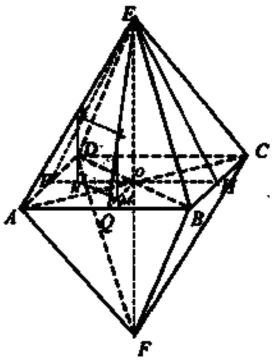
1) Все грани куба – равные квадраты. Диагонали граней куба, являющиеся ребрами тетраэдра, равны. D_1AB_1C – правильный.
2) Пусть a – сторона куба. Значит, из ΔABC:

   $AC=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2a^2}=a\sqrt{2}$ – ребро тетраэдра. $S_{\text{куба}}=6a^2$.

   $S_{\text{тетр.}}=4\cdot S_{AB_1C}=\dfrac{4(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}=2\sqrt{3}a^2$.

3) $\dfrac{S_{\text{куб}}}{S_{\text{тетр.}}}=\dfrac{6a^2}{2\sqrt{3}a^2}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$.

(*Ответ:* $\sqrt{3}$.)



№ 287 (для решения ученики вызываются к доске)

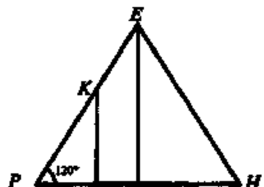
Дано: $ABCDEF$ – правильный октаэдр; $AB=a$.

Найти: а) BD; б) KL – расстояние между центрами двух смежных граней; в) HM – расстояние между противоположными гранями.

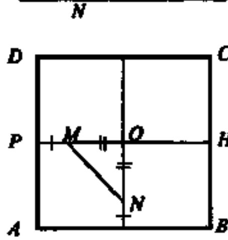
Решение:

а) Расстояние между противоположными вершинами для всех вершин одинаково. ΔABD – прямоугольный;

$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$.



б) Расстояние между центрами двух смежных граней одинаково для всех смежных граней.
   1) В грани DEA проведем высоту EP, в грани AEB проведем высоту EQ. Точки K, L – центры граней. KL – расстояние между центрами граней.
   2) В плоскости POE проводим $KN\perp PO$; в плоскости EQO проводим $LM\perp QO$. Тогда MN – проекция искомого отрезка KL на основание, $KLMN$ – прямоугольник.
   3) В ΔPEH по теореме косинусов $EH^2=$



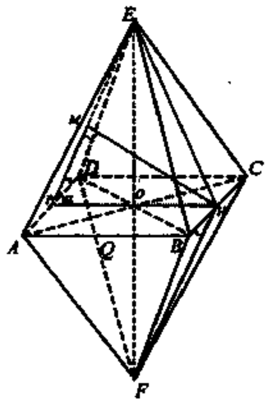
$$=PE^2+PH^2-2PE\cdot PH\cdot\cos\alpha\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+$$

$$a^2-2\cdot a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cos\alpha.\ a^2=2\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\cos\alpha,\ \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$ ΔEHB – прямо-

угольный. $EH=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}}=\frac{a}{2}\sqrt{3}$; $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$;

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

4) PK – радиус окружности, вписанной в правильный ΔEAD; $PK=r=\frac{a}{2\sqrt{3}}$; из ΔPNK: $PN=PK\cdot\cos\alpha=\frac{a}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{a}{6}$, $NO=$ $=OM=\frac{a}{2}-\frac{a}{6}=\frac{a}{3}$.



5) ΔNOM – прямоугольный и равнобедренный.

$NM=\sqrt{NO^2+OM^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^2}=$ $\frac{A\sqrt{2}}{3}$. Тогда $KL=NM=\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

в) 1) Проведем через середину квадрата $ABCD$ $PH\parallel AB$. $FH\perp BC$, $EP\perp AD$.

$$\left.\begin{array}{l}FH\perp BC\\ BC\parallel AD\\ EP\perp AD\end{array}\right|\Rightarrow FH\parallel EP,$$ грани AED и FBC параллельны

2) Плоскость $(PEH)\perp$ плоскости (FBC). В плоскости (PEH) проведен отрезок $MN\perp PE$.

3) $(PEH)\perp AD\Rightarrow HM\perp AD$, $HM\perp PE$, значит, $MH\perp(AED)$ и $MH\perp(FBC)$. Значит, HM – искомое расстояние.

4) $\sin\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}$; $HM=PH\cdot\sin\alpha=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

(*Ответ*: а) $a\sqrt{2}$; б) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$; в) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.)

Домашнее задание

1) §31–33, вопросы 13, 14.
2) Решить задачи № 283, 286 – II уровень; № 280, 285 – I уровень.
3) Практическое задание № 271–275 (каждому ученику дифференцированно – 1 многогранник).

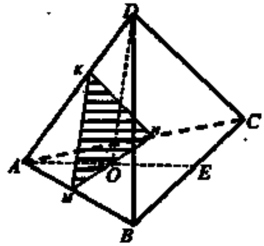
Ответы домашнего задания

I уровень

№ 280а. $a^2\sqrt{2}$; $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

II уровень

№ 283

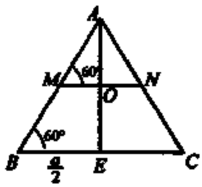


Решение: а) $\left.\begin{matrix} MK \parallel DB \\ MN \parallel BC \end{matrix}\right| \Rightarrow$ плоскость MKN – искомое сечение.

2) $AB = a$; $AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $AO = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$;

$AM = \dfrac{AO}{\sin 60°}$.

3) ΔADB – равносторонний, $KM \parallel DB$, значит, AMK – равносторонний,



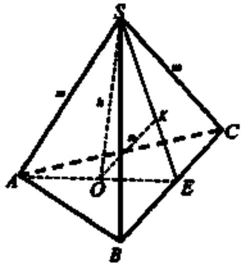
$AM{=}AK{=}KM{=}\dfrac{2a}{3}$; $\angle MKN = \angle BDC = 60°$

(как углы с соответственно параллельными и одинаково направленными сторонами).

$S_{\Delta MKN} = \dfrac{1}{2} MK \cdot KN \cdot \sin 60° = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2a}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{9}$

(*Ответ*: а) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{9}$; б) $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{9}$.)

№ 286



Решение:

1) ΔABC; AD – радиус описанной окружности. По теореме синусов $\dfrac{BC}{\sin 60°} = AD$;

$AD = \dfrac{m}{2 \cdot \sqrt{3}/2} = \dfrac{m}{\sqrt{3}}$; $OE = AE - OA = m \cdot$

$\cdot \sin 60 - \dfrac{m}{\sqrt{3}} = \dfrac{m\sqrt{3}}{2} - \dfrac{m}{\sqrt{3}} = \dfrac{m}{2\sqrt{3}}$.

2) ΔAOS – прямоугольный $AC^2 = AO^2 + OS^2$, $m^2 = \left(\dfrac{m}{\sqrt{3}}\right)^2 + h^2$.

$h^2 = m^2 - \dfrac{m^2}{3} = \dfrac{2}{3}m^2$; $h = m\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; $m = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}h = \dfrac{h\sqrt{6}}{2}$. б) $OE = EK$, значит, $OK \parallel AS$, $\Delta EOK \sim \Delta EAS$; $\dfrac{OK}{AS} = \dfrac{OE}{EA}$; $\dfrac{n}{m} = \dfrac{m}{2\sqrt{3}}$; $\dfrac{m\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{n}{m} = \dfrac{1}{3}$;

$n = \dfrac{1}{3}m$.

(*Ответ*: а) $m = \dfrac{h\sqrt{6}}{2}$; б) $n = \dfrac{1}{3}m$.)

Урок 55. Контрольная работа № 3.1 по теме «Многогранники» (см. приложение)

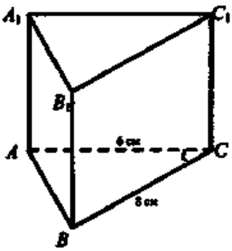
Цели урока:

1) проверить знания учащихся по теме «Многогранники», их умения применять полученные знания при решении конкретных задач;
2) выявить проблемы в знаниях учеников по указанной теме.

Решение контрольной работы

I уровень

Вариант I



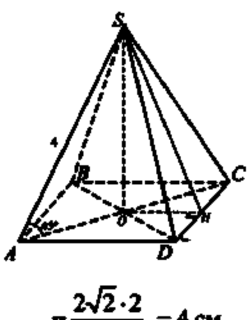
№ 1. *Дано:* $ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма; $\angle ACB = 90°$; $AC = 6$ см; $BC = 8$ см; ABB_1A_1 – квадрат.

Найти: $S_{бок.}$.

Решение:

1) ΔABC: $AB = \sqrt{6^2+8^2} = 10$ (по теореме Пифагора);
2) Наибольшая боковая грань – ABB_1A_1, так как AB – гипотенуза, тогда ABB_1A_1 – квадрат, $AA_1 = 10$ см.
3) $S_{бок.} = (AB + BC + AC) \cdot AA_1 = (6 + 8 + 10) \cdot 10 = 240$ см^2.

(*Ответ*: 240 см^2.)



№ 2. *Дано:* $SABCD$ – правильная четырехугольная пирамида; $SA = 4$ см, $\angle SAD = 45°$.

Найти а) SO; б) $S_{бок.}$

Решение:

1) ΔSAO – прямоугольный; $SO = AS \cdot \sin 45° = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ см; $SO = AO = 2\sqrt{2}$ см.
2) ΔAOD – прямоугольный. $AD = \frac{AO}{\cos 45°} = \frac{2\sqrt{2}\cdot 2}{\sqrt{2}} = 4$ см.
3) ΔSOH – прямоугольный; $SH = \sqrt{SO^2 + OH^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.
4) $S_{бок.} = 4\left(\frac{1}{2}DC \cdot SH\right) = 4\frac{1}{2}\cdot 4 \cdot 2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$ (см^2).

(*Ответ*: а) $2\sqrt{2}$ см; б) $16\sqrt{3}$ см^2.)

№ 3. *Дано:* $DABC$ – правильный тетраэдр; $AB = a$.

Построить: (MKP) – сечение: M – середина AD, $(MKP) \parallel (DBC)$, $MP \parallel BC$, (KMP – искомое сечение).

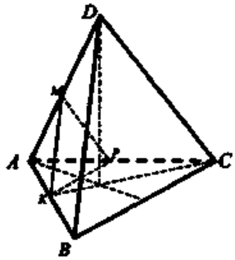
Найти: S_{MKP}.

Построение: 1) $MK \parallel DB$, $MP \parallel DC$ (по свойству секущей плоскости). Значит, (MKP) – искомое сечение.

2) MK – средняя линия в $\Delta ABD \Rightarrow MK = \dfrac{a}{2}$;

KP, MP – средние линии в ΔABC и ΔADC соответственно, значит, $KP = MP = \dfrac{1}{2}a$.

$$S_{MKP} = \frac{(a/2)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}.$$



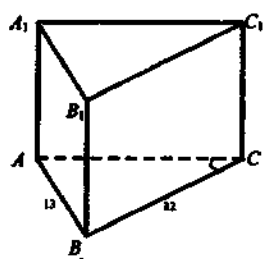
(*Ответ*: $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{16}$.)

Вариант II

№ 1. *Дано:* $ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма; ΔABC: $\angle C = 90°$; $AB = 13$ см; $BC = 12$ см.

Найти: $S_{бок.}$

Решение:



1) ΔABC – прямоугольный,

$AC = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ см.

2) Грань ACC_1A_1 – наименьшая, так как AC – меньший катет, тогда ACC_1A_1 – квадрат, $CC_1 = 5$ см.

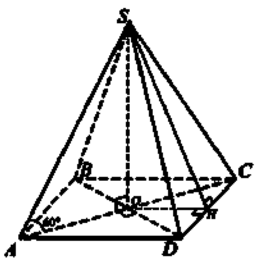
3) $S_{бок.} = (13 + 12 + 5) \cdot 5 = 150$ (см^2).

(*Ответ*: $S_{бок.} = 150$ см^2.)

№ 2. *Дано:* $SABCD$ – правильная пирамида; $SO = \sqrt{6}$ см; $\angle SAO = 60°$.

Найти: а) SA; $S_{бок.}$

Решение:



1) ΔSAO – прямоугольный; $SA = \dfrac{SO}{\sin 60°} =$

$$= \frac{\sqrt{6}\cdot 2}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}\cdot 2 \text{ (см)};\ AO = \frac{SO}{\text{tg}60°} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} \text{ см}.$$

2) $\Delta AOD = \dfrac{AO}{\cos 45°} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot 2}{\sqrt{2}} = 2$ см.

3) ΔSOH – прямоугольный; $SH = \sqrt{SO^2 + OH^2} = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + 1^2} = \sqrt{7}$ см.

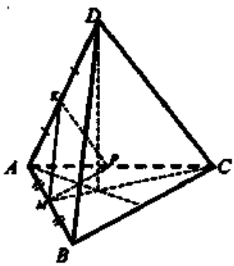
4) $S_{бок.} = 4\left(\dfrac{1}{2}DC \cdot SN\right) = 4\dfrac{1}{2}\cdot 2 \cdot \sqrt{7} = 4\sqrt{7}$ (см^2).

(*Ответ*: $2\sqrt{2}$ см; $4\sqrt{7}$ см^2.)

№ 3. *Дано:* $DABC$ – правильный тетраэдр; $AB = a$.

Построить: сечение (MKP): K – середина AD; M – середина AB; ($KMP \parallel BC$).

Найти: S_{MKP}.



Решение:

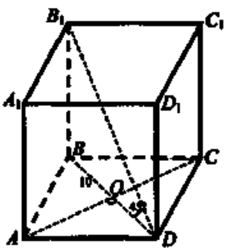
1) KM, MP, KP – средние линии ΔABD, ΔABC, ΔADC соответственно, значит, $KM = MP = KP = \frac{1}{2}a$.

2) $S_{MKP} = \frac{(a/2)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$.

(*Ответ*: $S_{MKP} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$)

II уровень

Вариант I



№ 1. *Дано:* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямой параллелепипед, $ABCD$ – ромб, $BD = 10$ см; $AC = 24$ см; $\angle B_1DB = 45°$.

Найти: $S_{полн.}$

Решение:

1) ΔBB_1D – прямоугольный. Меньшая диагональ параллелепипеда проектируется в меньшую диагональ основания $\angle BDB_1 = 45°$, тогда $BB_1 = BD = 10$ см;

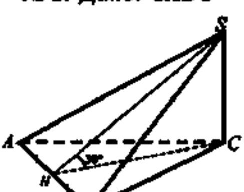
2) ΔAOD – прямоугольный. AD = $\sqrt{5^2+12^2} = \sqrt{169} = 13$ см;

3) $S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн.} = 4(AD \cdot AA_1) + \left(\frac{1}{2}AC + BD\right)^2 = 4(13 \cdot 10) + $

$+ \left(\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 24\right) \cdot \cdot 2 = 760$ (см^2).

(*Ответ*: 760 см^2.)

№ 2. *Дано:* $SABC$ – пирамида; ΔABC – правильный; $S_{\Delta ABC} = 9\sqrt{3}$ см^2; $(SBC) \perp (ABC)$, $(SAC) \perp (ABC)$, $\angle SHC = 30°$.



Найти: а) SC, SA, SB; б) $S_{бок.}$

Решение:

1) $S_{\Delta ABC}\ \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$; $AB^2 = 36$; $AB = 6$ см.

2) $HB = 3$ см; ΔHBC:

$HC = \sqrt{BC^2 - HB^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ см.

3) ΔSHC: $\frac{SH}{HC}$ tg30°; $SC = HC \cdot \text{tg}30° = 3\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 3$ см.

4) ΔSHC: $SH = \frac{SC}{\sin 30°} = 3 : \frac{1}{2} = 6$ см.

5) ΔSBC: $SB = \sqrt{SC^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ см.

6) $S_{бок.} = S_{\Delta ACB} + 2S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2}AB \cdot AH + 2\frac{1}{2}SC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot + 3 \cdot 6 = 36$ (см^2).

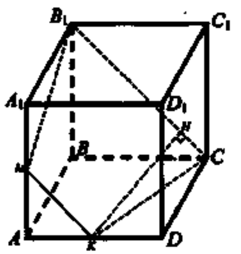
(*Ответ*: а) 3 см, $3\sqrt{5}$ см, $3\sqrt{5}$; 36 см^2.)

№ 3. *Дано:* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб: $AB = a$.

Построить: сечение MB_1CK.

Найти: $S_{сеч.}$

Решение:



1) По свойству секущей плоскости $MK \parallel B_1C$, тогда MB_1CK – искомое сечение.

2) MB_1CK – равнобокая трапеция; ΔAMK:

$$MK = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

3) ΔB_1C_1C: $B_1C = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$.

4) ΔKDC – прямоугольный: $KC = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$.

5) $HC = S_{MB_1CK} = \frac{MK + B_1C}{2} KN = \frac{a\sqrt{2}/2 + a\sqrt{2}}{2}\left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} =$

$= \frac{9a^2}{8}$.

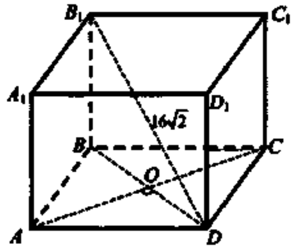
(*Ответ*: $S_{сеч.} = \frac{9a^2}{8}$.)

Вариант II

№ 1. *Дано:* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямой параллелепипед; $ABCD$ – ромб: $AC = 12$ см – меньшая диагональ; $BD_1 = 16\sqrt{2}$ см; $\angle BB_1D = 45°$.

Найти: $S_{полн.}$

Решение:



1) ΔB_1BD – прямоугольный: $B_1B = B_1D \cdot$

$\cdot \cos 45° = 16\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 16$ см;

$BB_1 = BD = 16$ см.

2) ΔAOD – прямоугольный: $AO^2 + OD^2 = AD^2$; $AD = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ см.

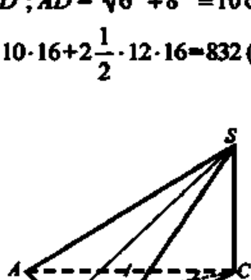
3) $S_{полн.} = S_{бок.} + 2S_{осн.} = 4(AD \cdot AA_1) + 2S_{ABCD} = 4 \cdot 10 \cdot 16 + 2\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 832$ (см^2).

(*Ответ*: $S_{полн.} = 832$ см^2.)

№ 2. *Дано:* $SABC$ – пирамида. ΔABC – прямоугольный: $AC = BC$; $SC \perp (ABC)$; $\angle SHC = 45°$; $AB = 4\sqrt{2}$ см.

Найти: а) SC, SA, SB; б) $S_{бок.}$

Решение:



1) ΔABC – прямоугольный: $AB = x$; $x^2 + x^2 = (4\sqrt{2})^2$; $2x^2 = 32$; $x^2 = 16$; $x = 4$ см; $AC = BC = 4$ см.

2) ΔHBC – прямоугольный:

$HC=\sqrt{BC^2-HB^2}=\sqrt{4^2-(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}=SC.$

3) ΔHSC: $SH=\dfrac{CH}{\cos 45°}=\dfrac{2\sqrt{2}\cdot 2}{\sqrt{2}}=4$ см; $SC=\sqrt{SH^2-HC^2}=\sqrt{4^2-(2\sqrt{2})^2}=$

$=\sqrt{16-8}=2\sqrt{2}.$

4) ΔSBC: $SB=\sqrt{SC^2+DC^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+4^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}=SA.$

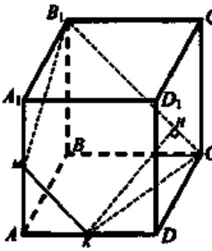
5) $S_{бок.}=S_{\Delta ASB}+2S_{\Delta SBC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot SH+2\dfrac{1}{2}BC\cdot SC=\dfrac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 4+4\cdot 2\sqrt{2}=$

$=16\sqrt{2}$ см^2.

(*Ответ*: а) $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{6}$ см, $2\sqrt{6}$ см; б) $S_{бок.}=16\sqrt{2}$ см^2.)

№ 3. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб: $AB=a$.

Построить: сечение MB_1CK.



Найти: S_{MB_1CK}.

Решение:

1) По свойству секущей плоскости $MK \parallel B_1C$, тогда MB_1CK – искомое сечение.
2) $MB_1=KC$, MB_1CK – равнобокая трапеция; ΔAMK: $MK=\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
3) ΔB_1C_1C; $B_1C=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$.
4) ΔKDC – прямоугольный. $KC=\sqrt{a^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{a}{2}\sqrt{5}$.
5) $HC=\dfrac{B_1C-MK}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}-a\sqrt{2}/2}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$;

$KH=\sqrt{KC^2-HC^2}=\sqrt{\dfrac{5a^2}{4}-\dfrac{2a^2}{16}}=\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$.

6) $S_{MB_1CK}=\dfrac{MK+B_1C}{2}KH=\dfrac{a\sqrt{2}/2+a\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}\right)=\dfrac{9a^2}{8}$.

(*Ответ*: $S_{сеч.}=\dfrac{9a^2}{8}$.)

III уровень

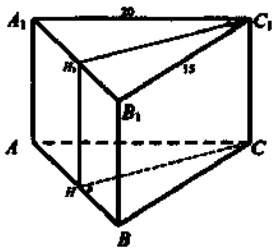
Вариант I

№ 1. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – прямоугольная призма; ΔABC: $\angle C=90°$; $AC=20$ см; $BC=15$ см; $S_{C_1H_1HC}$ – наименьшее сечение, проходящее через боковое ребро – квадрат.

Найти: $S_{полн}$.

Решение:

1) $\Delta A_1B_1C_1$; $A_1B_1=\sqrt{20^2+15^2}=\sqrt{625}=25$ см.



2) C_1H_1 – меньшая высота в $\Delta A_1B_1C_1$;

$$C_1H_1 = \frac{A_1C_1 \cdot B_1C_1}{A_1B_1} = 12 = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12 \text{ см};$$

HH_1C_1C – квадрат $\Rightarrow CC_1 = 12$ см.

3) $S_{полн.} = S_{бок.} + 2S_{осн.} = (20 + 15 + 25) \cdot 12 +$

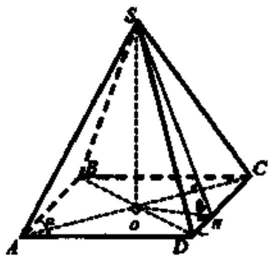
$$+ 2\frac{1}{2} 20 \cdot 15 = 1020 \text{ см}^2.$$

(*Ответ*: 1020 см^2.)

№ 2. *Дано:* $SABCD$ – пирамида; $ABCD$ – ромб; $\angle A = \alpha$; $AC = d$; $\angle SHO = \beta$.

Найти: $S_{пол}$.

Решение:



1) ΔAOD – прямоугольный:

$$AD = \frac{AO}{\cos\alpha/2} = \frac{d}{2 \cdot \cos\alpha/2}.$$

2) ΔOCH – прямоугольный: $OH = \dfrac{d}{2}\sin\dfrac{\alpha}{a}$;

ΔOSH – прямоугольный: $SH = \dfrac{OH}{\cos\beta} = \dfrac{d/2\sin\alpha/2}{\cos\beta}$.

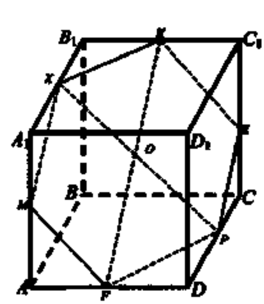
3) $S_{осн.} = AD \cdot AB \cdot \sin\alpha = \dfrac{d^2\sin\alpha}{4\cos^2\alpha/2}$.

4) $S_{полн.} = S_{бок.} + S_{осн.} = 4(\frac{1}{2}DC \cdot SH) + \dfrac{d^2\sin\alpha}{4\cos\alpha/2} = 2\dfrac{d}{2\cos\alpha/2} \cdot \dfrac{d/2\sin\alpha/2}{\cos\beta} +$

$$+\frac{d^2\sin\alpha}{4\cos^2\alpha/2} = \frac{d^2}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{\cos\beta} + \frac{d^2 \cdot 2\sin\alpha/2\cos\alpha/2}{4\cos^2\alpha/2} = \frac{d^2\operatorname{tg}\alpha/2}{2\cos\beta} +$$

$$+\frac{d^2\operatorname{tg}\alpha/2}{2} = \frac{d^2}{2}\operatorname{tg}\alpha/2\left(\frac{1}{\cos\beta}+1\right).$$

(*Ответ*: $S_{полн.} = \dfrac{d^2}{2}\operatorname{tg}\alpha/2\left(\dfrac{1}{\cos\beta}+1\right)$.)



№ 3. *Дано:* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб; $AB = a$; M, K, P – середины ребер AA_1, B_1C_1, CD соответственно.

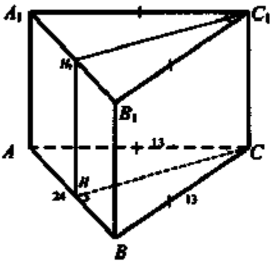
Построить: сечение, проходящее через точки M, K, P.

Найти: $S_{сеч}$.

Решение: 1) $MX \parallel PF$ (так как секущая плоскость пересекает противоположные грани по параллельным отрезкам). Значит, $MF \parallel KE$, $XK \parallel FP$. Тогда $MXKEPF$ – правильный шестиугольник: $FP = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

$S_{\text{сеч}} = 6\cdot S_{\Delta OFP} = 6\cdot\frac{\left(a/\sqrt{2}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4} = \frac{6a^2\sqrt{3}}{2\cdot 4} = \frac{3}{4}a^2\sqrt{3}$. (*Ответ*: $S_{\text{сеч}} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$.)

Вариант II



№ 1. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямая призма. ΔABC: $AC = BC = 13$ см; $AB = 24$ см. HH_1C_1C – квадрат – наименьшее сечение призмы, проходящее через боковое ребро.

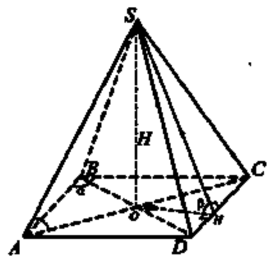
Найти: $S_{\text{полн}}$.

Решение:

1) ΔHBC – равнобедренный. $HC = 13\cdot$ $\cdot\sqrt{13^2-12^2} = \sqrt{169-144} = 5$ см,
$HC = CC_1 = 5$ см.

2) $S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}} = (13+13+24)\cdot 5 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 24\cdot 5 = 370$ см^2.

(*Ответ*: $S_{\text{полн.}} = 370$ см^2.)



№ 2. Дано: $ABCD$ – ромб; $SABCD$ – пирамида; $\angle B = \alpha$; $\angle SHO = \beta$; $SO = H$;

Найти: $S_{\text{полн.}}$

Решение: $S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}}$.

1) ΔSOH – прямоугольный; $SH = \frac{SO}{\sin\beta} = \frac{H}{\sin\beta}$; $OH = \frac{SO}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{H}{\operatorname{tg}\beta}$.

2) ΔHOD – прямоугольный; $OD = \frac{OH}{\sin\alpha/2} = \frac{H}{\operatorname{tg}\beta\sin\alpha/2}$.

3) ΔODC – прямоугольный; $OC = OD\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{H\cdot\operatorname{tg}\alpha/2}{\operatorname{tg}\beta\cdot\sin\alpha/2} = \frac{H}{\operatorname{tg}\beta\cdot\cos\alpha/2}$.

4) ΔDOC – прямоугольный; $DC = \sqrt{OD^2+OC^2} =$

$$= \sqrt{\frac{H^2}{\operatorname{tg}^2\beta\cdot\sin^2\alpha/2} + \frac{H^2}{\operatorname{tg}^2\beta\cdot\cos^2\alpha/2}} = \sqrt{\frac{H^2\left(\cos^2\alpha/2+\sin^2\alpha/2\right)}{\operatorname{tg}^2\beta\cdot\sin^2\alpha/2\cdot\cos^2\alpha/2}} = \frac{2H}{\operatorname{tg}\beta\sin\alpha}.$$

5) $S_{\text{полн.}} = 4\left(\frac{1}{2}DC\cdot SH\right) + \frac{1}{2}AC\cdot BD = 2\frac{2H}{\operatorname{tg}\beta\sin\alpha}\cdot\frac{H}{\sin\beta} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2H}{\operatorname{tg}\beta\cos\alpha/2}\cdot$

$$\cdot\frac{2H}{\operatorname{tg}\beta\sin\alpha/2} = \frac{4H^2\operatorname{ctg}\beta}{\sin\alpha\sin\beta} + \frac{4H^2\operatorname{ctg}^2\beta}{\sin\alpha} = \frac{4H^2\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\beta\sin\alpha\sin\beta} + \frac{4H^2\operatorname{ctg}^2\beta}{\sin\alpha} =$$

$$=\frac{4H^2\mathrm{ctg}^2\beta}{\sin\alpha}\left(1+\frac{1}{\cos\beta}\right).$$

(*Ответ*: $S_{\text{полн.}}=\frac{4H^2\mathrm{ctg}^2\beta}{\sin\alpha}\left(1+\frac{1}{\cos\beta}\right)$.)

№ 3.

Аналогично № 3, вариант 1. (*Ответ*: $\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$.)

Урок № 56. Зачет № 3 по теме «Многогранники. Площадь поверхности призмы, пирамиды»

Цели урока:

1) проверить уровень теоретических знаний;

2) умение решать задачи и навыки учащихся по теме «Многогранники».

I уровень

Карточка № 1

1. Призма. Площадь боковой поверхности прямой призмы.
2. Основания прямой призмы – ромб со стороной 5 см и тупым углом 120°. Боковая поверхность призмы имеет площадь 240 см^2. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через боковое ребро и меньшую диагональ основания.
3. Сторона правильной треугольной пирамиды равна 6 см, а высота $\sqrt{13}$ см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Карточка № 2

1. Пирамида. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды.
2. Основание прямой призмы – ромб с острым углом 60°. Боковое ребро призмы равно 10 см, а площадь боковой поверхности – 240 см^2. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через боковое ребро и меньшую диагональ основания.
3. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 5 см, а высота $\sqrt{13}$ см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

II уровень

Карточка № 1

1. Правильные многогранники.
2. Основание прямого параллелепипеда – ромб. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если площади его диагональных сечений P и Q.
3. Основание пирамиды – прямоугольный треугольник с катетом $4\sqrt{3}$ см и противолежащим углом 60°. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Карточка № 2

1. Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды.
2. Диагональное сечение правильной четырехугольной призмы имеет площадь Q. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

3. Основание пирамиды – прямоугольный треугольник с острым углом 30°. Высота пирамиды равна 4 см и образует со всеми боковыми ребрами углы 45°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

III уровень

Карточка № 1

1. Призма. Площадь боковой поверхности прямой призмы.
2. В прямой призме $ABCA_1B_1C_1$ $AB = 13$, $BC = 21$, $AC = 20$. Диагональ боковой грани A_1C составляет с плоскостью грани CC_1B_1B угол 30°. Найдите площадь полной поверхности призмы.
3. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a, угол между смежными боковыми гранями равен 120°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

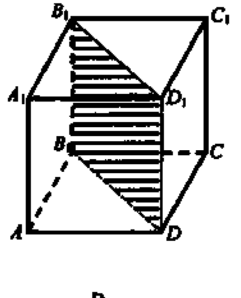
Карточка № 2

1. Пирамида. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды.
2. В прямом параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AD = 17$, $DC = 28$, $AC = 39$. Диагональ боковой грани A_1D составляет с плоскостью боковой грани DD_1C_1C угол 45°. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.
3. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна m. Угол между смежными боковыми гранями равен 120°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Решения

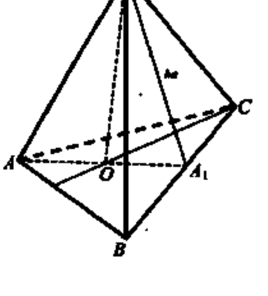
I уровень (карточка 1)

№ 1. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямая призма. $ABCD$ – ромб. $AD = 5$ см; $\angle B = 120°$; $S_{бок.} = 240$ см^2.



Найти: $S_{сеч.}$

Решение: Сечение, проходящее через боковое ребро и меньшую диагональ основания BB_1D_1D. BB_1D_1D – *прямоугольник.* $S_{сеч.} = BD \cdot DD_1$. $\angle A = 180° — 120° = 60°$, так как $ABDC$ – ромб, то ΔABD – равносторонний и $BD = AD = 5$ см. $S_{бок.} = P_{осн.} \cdot DD_1$. $P_{осн.} = 4 \cdot 5 = 20$. $DD_1 = \dfrac{240}{20} = 12$ см. $S_{сеч.} = 12 \cdot 5 = 60$ см^2. (*Ответ*: 60 см^2.)



№ 2. Дано: $DABC$ – правильная треугольная пирамида $AB = BC = = AC = 6$ см. DO – высота; $DO = \sqrt{3}$.

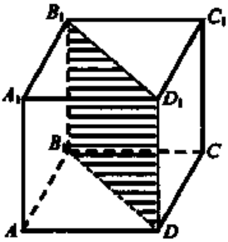
Найти: $S_{бок.}$

Решение: Так как пирамида правильная, то O – центр описанной и вписанной в ΔABC окружности. $S_{бок.} = \dfrac{1}{2} ha \cdot P_{осн.}$, где ha – апофема боковой грани. $P_{осн.} = 3 \cdot 6 = 18$ см. Рассмотрим ΔAA_1C: $AA_1 = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

$OA_1 = \frac{1}{3} AA_1$; $OA_1 = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$. Из ΔDOA_1: $DA = \sqrt{13+3} = \sqrt{16} = 4$.

$S_{бок.} = \frac{1}{2} 4 \cdot 8 = 36$ см^2. (*Ответ*: $S_{бок.} = 36$ см^2.)

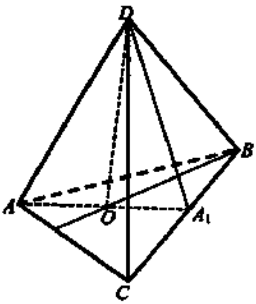
I уровень (карточка 2)



№ 1. *Дано:* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямая призма. $ABCD$ – ромб. $\angle A = 60°$. $AA_1 = 10$ см. $S_{бок.} = 240$ см^2.

Найти: $S_{сеч.}$

Решение: Сечение, проходящее через боковое ребро и меньшую диагональ основания BB_1D_1D. BB_1D_1D – прямоугольник. $S_{сеч.} = BD \cdot DD_1$. $S_{бок.} = P_{осн.} \cdot AA_1$. $P_{осн.} = \frac{240}{10} 24$ см. $AB = BC = = DC = AC$ (по условию). $AB = \frac{24}{4} = 6$ см. Рассмотрим ΔABD, так как $\angle A = 60°$, то ΔABD – равносторонний. BD = 6 см. $S_{сеч.} = 6 \cdot 10 = 60$ см. (*Ответ*: 60 см.)



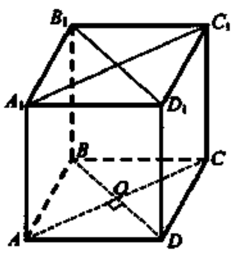
№ 2. *Дано:* $DABC$ – правильная треугольная пирамида $DC = DB = AD = 5$ см. DO – высота; $DO = \sqrt{13}$ см.

Найти: $S_{бок.}$

Решение: $S_{бок.} = \frac{1}{2} P_{осн.} \cdot ha$, где ha – апофема боковой грани. Рассмотрим ΔAOD: $AO = \sqrt{25-13} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ (см). $OA_1 = \frac{1}{2} OA$. $OA_1 = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ (см). $DA_1 = \sqrt{13+3} = \sqrt{16} = 4$. Итак, $ha = 4$ (см). Рассмотрим ΔABC – равносторонний. $AC^2 - A_1C^2 = AA_1^2$; $AA_1 = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$. $AC_1 = \frac{1}{2} AC$. $AC^2 - \frac{AC^2}{4} = (3\sqrt{3})^2$; $\frac{3 \cdot AC^2}{4} = 27$; $AC^2 = 36$. $AC = 6$ (см).

$S_{бок.} = \frac{1}{2} 3 \cdot 6 \cdot 4 = 36$ (см^2). (*Ответ*: $S_{бок.} = 36$ см^2.)

II уровень (карточка 1)



№ 1. *Дано:* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямой параллелепипед. $ABCD$ – ромб. $S_{AC_1CA} = P$; $S_{B_1D_1DB} = Q$.

Найти: $S_{бок.}$

Решение:

1) $P = BD \cdot AA_1 \Rightarrow BD = \frac{P}{AA_1}$; $Q = AC \cdot AA_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = \frac{Q}{AA_1}$.

2) $S_{бок.} = P_{осн.} \cdot AA_1$.

3) Диагонали ромба, пересекаясь, делятся пополам и взаимно перпендикулярны. $AD^2 = AO^2 + OD^2 = \left(\frac{1}{2}AC\right)^2 + \left(\frac{1}{2}BD\right)^2 = \frac{AC^2}{4} + \frac{BD^2}{4} =$

$= \frac{Q^2}{4AA_1^2} + \frac{P}{4AA_1^2} = \frac{Q^2+P^2}{4AA_1^2}$; $AD = \frac{\sqrt{Q^2+P^2}}{2AA_1}$; $S_{бок.} = \frac{\sqrt{Q^2+P^2}}{2AA_1}$.

$AA_1 = \frac{\sqrt{Q^2+P^2}}{2}$.

(*Ответ*: $S_{бок.} = \frac{\sqrt{Q^2+P^2}}{2}$.)

№ 2. Дано: $DABC$ – пирамида $\angle C = 90°$; $CA = 4\sqrt{3}$ (см); $\angle B = 60°$; $\angle DBO = \angle DAO = \angle DCO = 45°$.

Найти: $S_{бок.}$

Решение: Так как ребра пирамиды наклонены под одним и тем же углом, то $OA = OB = CO$. Точка O – центр описанной около ΔABC окружности и является серединой гипотенузы. $S_{бок.} = S_{CAD} + S_{ABD} + S_{CBD}$.

1) Рассмотрим ΔADB: $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}DO \cdot AB$. ΔDAO – равнобедренный ($\angle DAO = 45°$). Следовательно, $AO = DO$. $AO = \frac{1}{2}AB$. AB определим из ΔABC. $\frac{AC}{AB} = \sin 60°$; $AB = \frac{AC}{\sin 60°} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{3}} = 8$ см. $AO = 4$ см. $DO = 4$ см. $S_{\Delta ABD} = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16$ (см^2).

2) Рассмотрим ΔCDA: $S_{\Delta CDA} = \frac{1}{2}DM \cdot CA$. DM определим из ΔDOM. $DM = \sqrt{DO^2 + OM^2}$. OM определим из ΔABC. $OM = \frac{1}{2}BC$. $BC = \frac{1}{2}AB$ (катет против угла в 30°). $BC = 4$ см. $MO = 2$ см. $DM = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. $S_{\Delta CDA} = \frac{1}{2}2\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{3} = 4\sqrt{15}$.

3) Рассмотрим ΔCDB: $S_{\Delta CDB} = \frac{1}{2}BC \cdot DN; DN = \sqrt{DO^2 + ON^2}$; $ON = \frac{1}{2}AC$; $ON = 2\sqrt{3}$ (см); $DN = \sqrt{16 + 3 \cdot 4} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$. $S_{\Delta CDB} = \frac{1}{2}4 \cdot 2\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$.

$S_{бок.} = 16 + 4\sqrt{15} + 4\sqrt{7} = 4(4 + \sqrt{15} + \sqrt{7})$ (см^2).

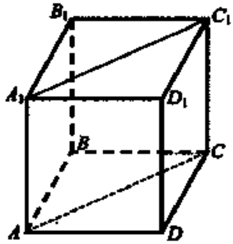
(*Ответ*: $S_{бок.} = 4(4 + \sqrt{15} + \sqrt{7})$ см^2.)

II уровень (карточка 2)

№ 1. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильная четырехугольная призма. $ABCD$ – квадрат. $S_{ACA_1C_1} = Q$.

Найти: $S_{бок.}$

Решение: $S_{бок.} = P_{осн.} \cdot AA_1$. $S_{ACA_1C_1} = Q$;

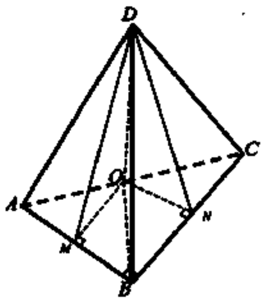


$Q = AC \cdot AA_1$. $AC = \dfrac{Q}{AA_1}$. Рассмотрим ΔADC: $AC^2 = AD^2 + DC^2$, так как $ABCD$ – квадрат, то $AC^2 = 2AD^2$.

$AD^2 = \dfrac{AC^2}{2}$. $AD = \dfrac{\sqrt{AC^2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = \dfrac{Q}{\sqrt{2}AA_1}$. $P_{осн.} =$

$\dfrac{4Q}{AA_1 \cdot \sqrt{2}}$. $S_{бок.} = \dfrac{4Q}{AA_1\sqrt{2}} \cdot AA_1 =$

$= \dfrac{4Q}{\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}Q}{2} = 2\sqrt{2}Q$. (*Ответ*: $S_{бок.} = 2\sqrt{2}Q$.)



№ 2. Дано: $DABC$ – пирамида. ΔABC – прямоугольный; $\angle C = 90°$; $\angle B = 30°$; DO – высота; $DO = 4$ см. $\angle ADO = \angle BDO = \angle CDO$

Найти: $S_{бок.}$

Решение: $\Delta ADO = \Delta DBO = \Delta CDO$ (по катету и острому углу). Следовательно, $AO = OB = OC$. Значит, точка O – центр описанной около ΔABC окружности и, следовательно, – середина гипотенузы. Из равенства треугольников следует $AO = OB = OC = OD$ (равнобедренные, прямоугольные). $AO = 4$ см. $AB = 8$ см. Рассмотрим ΔABC: $AC = \dfrac{1}{2}AB$. $AC = \dfrac{1}{2}AB = 4$ см. $BC = \sqrt{64-16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ (см).

$OM = \dfrac{1}{2}BC = 2\sqrt{3}$ (см). $ON = \dfrac{1}{2}AC = 2$ (см).

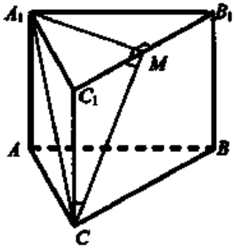
1. Рассмотрим ΔADB: $S_{\Delta ADB} = \dfrac{1}{2}AB \cdot DO = \dfrac{1}{2}8 \cdot 4 = 16$ см^2.
2. Рассмотрим ΔADC: $S_{\Delta ADC} = \dfrac{1}{2}AC \cdot DM$. $DM = \sqrt{OM^2 + DO^2} = \sqrt{4 \cdot 3 + 16} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ (из ΔDMO); $S_{\Delta ADC} = \dfrac{1}{2}4 \cdot 2\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$ (см^2).
3. $S_{\Delta DBC} = \dfrac{1}{2}BC \cdot DN$. $DN = \sqrt{ON^2 + DO^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ (см) (из ΔDNO); $S_{\Delta DBC} = \dfrac{1}{2}4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{5} = 4\sqrt{15}$ (см^2); $S_{бок.} = 16 + 4\sqrt{7} + 4\sqrt{15} = 4(4 + \sqrt{7} + \sqrt{15})$ (см^2).

(*Ответ*: $S_{бок.} = 4(4 + \sqrt{7} + \sqrt{15})$ см^2.)

III уровень (карточка 1)

№ 1. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма. $AB = 13$, $BC = 21$, $AC = 20$; $\angle ACM = 30°$.

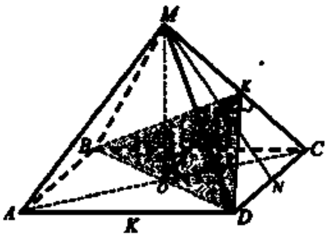
Найти: $S_{полн.}$



Решение: Угол между A_1C и плоскостью BB_1C_1C равен 30°. Это угол между прямой A_1C и ее проекцией на плоскость BB_1C_1C. $A_1M \perp B_1C_1$, MC – проекция A_1C на плоскость BB_1CC_1. $\angle ACM = 30°$. $S_{полн.} = 2\,S_{осн.} + P_{осн.} \cdot CC_1$.

$S_{осн.} = \sqrt{P(p-a)(p-в)(p-c)}$; $P = \dfrac{13+21+20}{2} = 27$; $S_{осн.} = \sqrt{27 \cdot 6 \cdot 14 \cdot 7} = 126$; $S_{осн.} = 126$. Рассмотрим ΔA_1MC: A_1M – высота и $S_\Delta = \dfrac{1}{2} BC \cdot A_1M$; $B_1C_1 = BC = 21$; $A_1M = \dfrac{2S_\Delta}{B_1C_1}$; $A_1M = \dfrac{2 \cdot 126}{21} = 12$. Рассмотрим ΔA_1MC: $AC_1 = 2 \cdot A_1M$ (то есть $\angle A_1CM = 30°$); $A_1C = 24$ и $A_1A = \sqrt{24^2 - 20^2} = \sqrt{576-400} = \sqrt{176} = 4\sqrt{11}$. $S_{полн.} = 2 \cdot 126 + 54 \cdot 4\sqrt{11} = 252 + 216\sqrt{11} = 36(7 + 6\sqrt{11})$. (*Ответ:* $S_{полн.} = 36(7 + 6\sqrt{11})$.)

№ 2. *Дано:* $MABCD$ – правильная четырехугольная пирамида. $DA = a$; $\angle BKD = 120°$.



Найти: $S_{бок.}$

Решение: Угол между гранями BMC и DMC равен 120°; $DK \perp MC$; так как $\Delta BMC = \Delta DMC$, то $BK \perp MC$ и $\angle BKD$ – линейный угол двугранного угла с ребром MC; $S_{бок.} = \dfrac{1}{2} P_{осн.} \cdot ha$. $ha = MN$; $BD = a\sqrt{2}$ (диагональ квадрата); $OD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; ΔBKD – равнобедренный. Следовательно, $\angle OKD = 60°$, а $\angle ODK = 30°$ и $DK = \dfrac{OD}{\sin 60°} = \dfrac{2OD}{\sqrt{3}} = \dfrac{2a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Рассмотрим ΔDMC: $S_\Delta = \dfrac{1}{2} DC \cdot MN$ или $S_\Delta = \dfrac{1}{2} MC \cdot DK$. $DC \cdot MN = MC \cdot DK$. Из ΔDKC: $\sin\angle C = \dfrac{DK}{DC} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}a} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

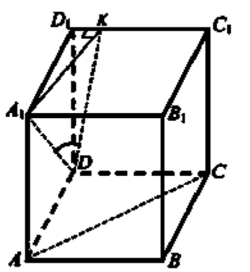
Из ΔMNC: $\cos\angle C = \dfrac{NC}{MC}$; $\cos\angle C = \sqrt{1 - \dfrac{2}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $MC = \dfrac{NC}{1/\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$;

$MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{1}{a} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $S_{бок.} = \dfrac{1}{2} 4a \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = a^2\sqrt{2}$. (*Ответ:* $S_{бок.} = a^2\sqrt{2}$.)

III уровень (карточка 2)

№ 1. *Дано:* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямой параллелепипед. $ABCD$ – параллелограмм; AD = 17 см; DC = 28, AC = 39; $\angle A_1DK = 45°$.

Найти: $S_{полн.}$



Решение: $S_{полн.} = 2S_{осн.} + P_{осн.} \cdot AA_1$; $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ADC}$

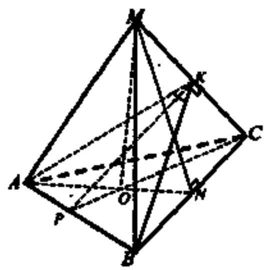
$S_{\Delta ADC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

$P = \dfrac{17+28+39}{2} = 42$; $\quad S_{\Delta ADC} = \sqrt{42 \cdot 25 \cdot 14 \cdot 3} = 210$.

$S_{ABCD} = 420$. Угол между A_1D и грань DD_1C_1C – это угол между A_1D и проекцией A_1D на плоскость DD_1CC_1. $A_1K \perp D_1C_1$, то $\angle A_1DK = 45°$. ΔA_1KD – равнобедренный прямоугольный. $A_1K = DK$;

$A_1K = \dfrac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{D_1C_1} = \dfrac{420}{28} = 15$. A_1D найдем из

ΔA_1KD: $A_1D = \sqrt{15^2 + 15^2} = 15\sqrt{2}$. A_1A найдем из ΔA_1AD: $A_1A = \sqrt{225 \cdot 2 - 289} = \sqrt{161}$. $\quad S_{полн.} = 2 + 2(17 + 28)\sqrt{161} = 840 + 90\sqrt{161} =$
$= 30(28 + 3\sqrt{161})$. (*Ответ*: $20(28 + 3\sqrt{161})$.)



№ 2. *Дано:* $MABC$ – правильная треугольная пирамида. $AB = BC = AC = m$. $\angle AKC = 120°$.

Найти: $S_{бок.}$

Решение: Угол между гранями AMB и CMD равен линейному углу $CK \perp MB$, так как $\Delta AMB = \Delta CMB$, то $AK \perp MB \Rightarrow \angle AKC$ – линейный двугранного угла при ребре MB. $\angle AKC = 120°$. $S_{бок.} = \dfrac{1}{2}P_{осн.} \cdot MN$; MN – апофема боковой грани. Рассмотрим ΔAKC: – равнобедренный. $KP \perp AC$ и $\angle PKC = 60°$; $PC = \dfrac{m}{2}$; $\quad \dfrac{PC}{KC} = \sin 60°$; $\quad KC = \dfrac{PC}{\sin 60°} = \dfrac{m \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{3}} = \dfrac{m}{\sqrt{3}}$. $\quad \Delta MNB \sim$

$\sim \Delta KBC$ ($\angle B$ – общий прямоугольника); $\dfrac{NB}{MN} = \dfrac{KB}{KC}$; KB найдем из

ΔCKB: $\quad KB = \sqrt{m^2 - \dfrac{m^2}{3}} = \dfrac{m\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. $\quad MN = \dfrac{NB \cdot KC}{KB} = \dfrac{m}{2} \cdot \dfrac{m}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{m\sqrt{2}} = \dfrac{m}{2\sqrt{2}}$.

$S_{бок.} = \dfrac{1}{2} 3m \dfrac{m}{2\sqrt{2}} = \dfrac{3m^2}{4\sqrt{2}} = \dfrac{3m^2\sqrt{2}}{8}$. $\quad 16 + 4\sqrt{7} + 4\sqrt{15} = 4(4 + \sqrt{7} + \sqrt{15})$(см^2).

(*Ответ*: $S_{бок.} = \dfrac{3m^2\sqrt{2}}{8}$ см^2.)

Глава IV
МНОГОГРАННИКИ

§ 1. ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ
(урок 57)

Урок 57. Понятие векторов. Равенство векторов

Цели урока:
1) ввести определение вектора в пространстве и равенства векторов;
2) рассмотреть связанные с этими понятиями обозначения.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока

II. Актуализация знаний учащихся

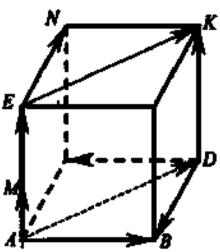
1. Анализ контрольной работы. Подвести итоги контрольной работы. Анализ наиболее часто встречающихся ошибок.
2. Подготовка к восприятию нового материала.

Понятие вектора является одним из наиболее основных в математике, объединяющим такие ее разделы, как геометрия, алгебра, математический анализ. Оно имеет большое прикладное значение, так как многие физические величины (сила, скорость и другие) характеризуются не только величиной, но и направлением, то есть являются векторными величинами. При изучении электрических и магнитных явлений появляются новые примеры векторных величин (векторы напряженности электрического поля, вектор магнитной индукции).

В планиметрии мы изучали векторы на плоскости. Здесь мы рассмотрим векторы в пространстве. Их определение и свойства аналогичны определению и свойствам векторов на плоскости.

III. Изучение нового материала

1. Определение. Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой – концом, называется вектором.



Ввести обозначение вектора, его длины, понятие нулевого вектора.

$\overrightarrow{AB}, \vec{a}, \left|\overrightarrow{AB}\right|, \left|\vec{a}\right|, \vec{0}.$

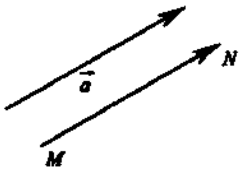
2. Ввести определения коллинеарных векторов, сонаправленных и противоположно направленных векторов. Ввести обозначения $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}, \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}.$

Обратить внимание, что нулевой вектор сонаправлен любому вектору. На доске рисунок. Найти сонаправленные векторы.

Сонаправленные: $\overrightarrow{AM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DK}$, $\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{AM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AE} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DK}$.

Противоположно направленные: $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{EN} \uparrow\downarrow \overrightarrow{DB}$.

3. Ввести определение равных векторов: $\vec{a} = \vec{b}$, если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.
4. Отметить, что от любой точки пространства можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.

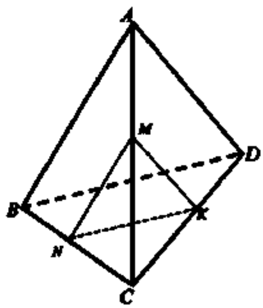


Дано: $\vec{a}$, M.

Доказать: существование $\vec{b} = \vec{a}$, $M \in \vec{b}$; $\vec{b}$ – единственный вектор.

Доказательство: Проведем через начало и конец вектора $\vec{a}$ и точку M плоскость и в этой плоскости построим $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$. Из теоремы о параллельности прямых следует существование и единственность вектора $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$, где $M \in \overrightarrow{MN}$.

IV. Закрепление изученного материала



№ 320а. *Дано:* $ABCD$ – тетраэдр. Точки M, N, K – середины AC, BC, CD; соответственно, $AB = 3$ см; $BC = 4$ см; $BD = 5$ см.

Найти: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{NK}$.

Решение: По условию задачи известно, что M, N, K – середины сторон AC, BC, CD соответственно, поэтому MK – средняя линия ΔACD, NK – средняя линия ΔBCD. $\overrightarrow{AB} = 3$ см, $\overrightarrow{BC} = 4$ см, $\overrightarrow{BD} = 5$ см. $|\overrightarrow{NM}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}| = 1{,}5$ см, $|\overrightarrow{NK}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}| = 2{,}5$ см, $|\overrightarrow{BN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}| = 2$ см. (*Ответ*: 3 см, 4 см, 5 см, 1,5 см, 2 см, 2,5 см.)

№ 322 (устно)

Вспомните свойства граней и диагоналей параллелепипеда.

По рисунку учебника учащиеся называют все пары:

а) сонаправленных векторов $\overrightarrow{DK} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{CB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{D_1A_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{C_1B_1}$;

б) противоположно направленных векторов $\overrightarrow{CD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{A_1A} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{AD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{D_1A_1}$, $\overrightarrow{AD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{C_1B_1}$;

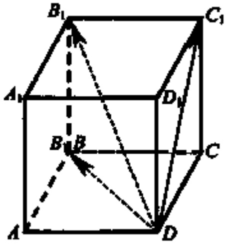
в) равных векторов $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{D_1A_1} = \overrightarrow{C_1B_1}$.

№ 326 (устно)

(*Ответы*: а) $\overrightarrow{CC_1}$; б) $\overrightarrow{DK}$; в) $\overrightarrow{A_1C_1}$; г) $\overrightarrow{C_1B_1}$; д) $\overrightarrow{MB_1}$.)

V. Самостоятельная работа (обучающая)

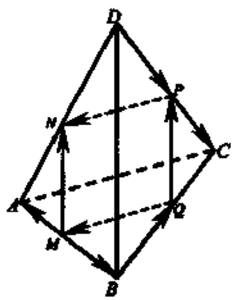
Работы учащихся, справившихся раньше других, можно оценить.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, $AD = 8$ см, $AB = 9$ см, $AA_1 = 12$ см.

Найти: а) $|\overrightarrow{CC_1}|$, $|\overrightarrow{CB}|$, $|\overrightarrow{CD}|$; б) $|\overrightarrow{DC_1}|$, $|\overrightarrow{DB}|$, $|\overrightarrow{DB_1}|$.

Решение: По свойству параллелепипеда $|\overrightarrow{CC_1}| = 12$ см. $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB}| = 8$ см, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| = 9$ см. По теореме Пифагора $|\overrightarrow{DC_1}| = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{144+81} = \sqrt{225} = 15$ (см); $|\overrightarrow{DB}| = \sqrt{8^2+9^2} = \sqrt{64+81} = \sqrt{145}$ (см); $|\overrightarrow{DB_1}| = \sqrt{|\overrightarrow{DB}|^2 + |\overrightarrow{BB_1}|^2} = \sqrt{145+144} = \sqrt{289} = 17$ (см). (*Ответ*: а) 12 см, 8 см, 9 см; б) 15 см, $\sqrt{145}$ см, 17 см.)



№ 323. Дано: $DABC$ – тетраэдр, ребра которого равны. M, N, P, Q – середины сторон AB, AD, DC, BC.

а) *выписать* пары равных векторов;

б) *определить* вид четырехугольника $MNPQ$.

Решение:

а) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{QM}$, $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{PC}$;

б) Так как N, P, M, Q – середины сторон соответственно AB, AD, DC, BC, то NP – средняя линия ΔADC, а MQ – ΔABC; $NP = \frac{1}{2}AC$, $MQ = \frac{1}{2}AC$, значит, $NP = MQ$; MN – средняя линия ΔADB, а PQ – средняя линия ΔDBC. $MN = \frac{1}{2}DB$, $PQ = \frac{1}{2}DB$, значит, $MN = PQ$. Так как все ребра тетраэдра равны, то он правильный. Скрещивающиеся ребра в нем перпендикулярны. Тогда $BD \perp AC$. Имеем:

$$\left.\begin{array}{l} NP \parallel AC \parallel MQ \\ MN \parallel BD \parallel PQ \\ BD \parallel AC \\ MN = NP = MQ = PQ \end{array}\right| \Rightarrow MNPQ - \text{квадрат}$$

(*Ответ*: а) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{QM}$, $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{PC}$; б) квадрат.)

VI. Подведение итогов

Домашнее задание

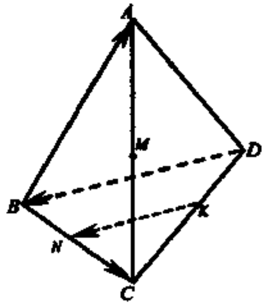
П. 34–35, № 320(б) – I уровень; № 234 – II уровень.

Дополнительная задача

Дан правильный тетраэдр $DABC$. Точки M, N, K – середины ребер AB, BC и CD соответственно. Найдите: $|\overrightarrow{MN}|$, если $|\overrightarrow{DM}| = \sqrt{3}$.

Решение домашнего задания

№ 320. *Дано:* $ABCD$ – тетраэдр, $M \in AC$, $AM = MC$; $N \in BC$, $BN = NC$; $K \in CD$, $CK = KD$. $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $BD = 5$ см.

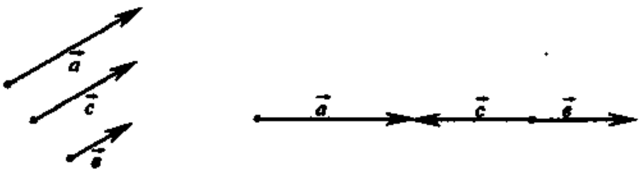


Найти: $|\overrightarrow{CB}|$, $|\overrightarrow{BA}|$, $|\overrightarrow{DB}|$, $|\overrightarrow{NC}|$, $|\overrightarrow{KN}|$.

Решение: $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CB}| = 4$ см, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}| = 3$ см, $|\overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{DB}| = 5$ см. Так как N – середина BC, то $|\overrightarrow{NC}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2}4 = 2$ см. KN – средняя линия ΔBCD. $|\overrightarrow{KN}| = \frac{1}{2}5 = 2{,}5$ (см). (*Ответ*: 4 см, 3 см, 5 см, 2 см, 2,5 см.)

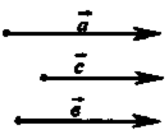
№ 324

а)



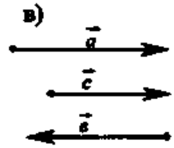
$\vec{c} \neq \vec{0}$

б)



$\vec{c} \neq \vec{0}$

в)

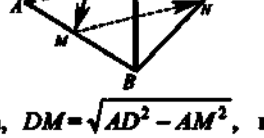


$\vec{c} \neq \vec{0}$

(*Ответ*: а) да; б) да; в) нет.)

Дополнительная задача

Дано: $DABC$ – правильный тетраэдр. M, N, K – середины ребер AB, BC, CD соответственно. $|\overrightarrow{DM}| = \sqrt{3}$.



Найти: $|\overrightarrow{MN}|$.

Решение: Так как тетраэдр правильный, то ΔADB – равносторонний. DM – высота, медиана и биссектриса. По теореме Пифагора, $DM = \sqrt{AD^2 - AM^2}$, где $AM = \frac{1}{2}AB$. $DM = \sqrt{AD^2 - \frac{AD^2}{4}} = \frac{AD \cdot \sqrt{3}}{2}$. По условию, $|\overrightarrow{DM}| = \sqrt{3}$; $\sqrt{3} = \frac{|\overrightarrow{AD}|\sqrt{3}}{2}$; $|\overrightarrow{AD}| = 2$, $|\overrightarrow{AC}| = 2$.

2) MN – средняя линия ΔABC: $|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|$; $|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}2 = 1$. (*Ответ*: 1.)

§ 2. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ. УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

(уроки 58–59)

Урок 58. Сложение и вычитание векторов. Сумма нескольких векторов

Цели урока:

1) повторить теоретические сведения по теме, изученные в курсе планиметрии;
2) рассмотреть правила треугольника и параллелограмма сложения векторов в пространстве, законы сложения векторов;
3) обратить внимание учащихся на два способа построения разности двух векторов;
4) изучить правило сложения нескольких векторов в пространстве и его применение при нахождении векторных сумм, не прибегая к рисункам.

Ход урока

I. Организационный момент

Постановка целей урока.

II. Повторение с целью подготовки учащихся к восприятию нового материала

Рекомендуется включить в домашнее задание с предыдущего урока повторение п. 80–82 из учебника «Геометрия. 7–9».

К доске вызвать четырёх учащихся для работы по карточкам, составленным таким образом, что задания, входящие в них, охватывают материал по теме «Сложение и вычитание векторов» из планиметрии.

Карточка № 1

1. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Построить вектор $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, пользуясь правилом треугольника.
2. Рассказать правило треугольника.
3. Упростить выражение $\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{ZT}+\overrightarrow{YZ}$.

Карточка № 2

1. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Построить вектор $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, пользуясь правилом параллелограмма.
2. Рассказать правило параллелограмма.
3. Упростить выражение $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{NK}$.

Карточка № 3

1. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Построить вектор $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.
2. Дать определение разности векторов.
3. Упростить выражение $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BX}$.

Карточка № 4

1. Даны векторы: $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$. Построить вектор $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$.

2. Рассказать правило сложения нескольких векторов.
3. Упростить выражение $\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{XY}-\overrightarrow{AY}+\overrightarrow{SX}$.

III. Фронтальная работа с классом / проводится пока учащиеся готовятся у доски

Ученики отвечают на вопросы:

- Что называется вектором в пространстве? Его обозначения.
- Что называется длиной вектора? Ее обозначение.
- Какой вектор называется нулевым?
- Какие векторы называются коллинеарными?
- Какие векторы называются сонаправленными? Обозначение.
- Какие векторы называются противоположно направленными? Обозначение.
- Каким (сонаправленными или противоположно направленным) принять нулевой вектор?
- Какие векторы называются равными?

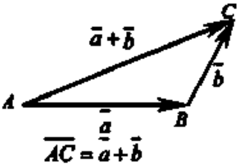
IV. Изучение нового материала

1. Начнется с прослушивания учащихся, работающих по карточкам.
2. Продолжит учитель, задача которого подчеркнуть, что сложение и вычитание векторов в пространстве вводится так же, как и на плоскости, и подчиняется тем же законам. Затем необходимо выделить из ответов учащихся главное (оставив эти фрагменты на доске), составить опорную схему по теме и дать учащимся время для работы над конспектом в тетради. Примерный вид конспектов:

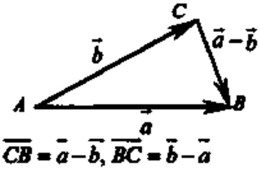
Сложение и вычитание векторов

1. Сумма и разность векторов:

$\boxed{\overline{AB}-\overline{AC}=\overline{CB}}$ $\boxed{\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}}$

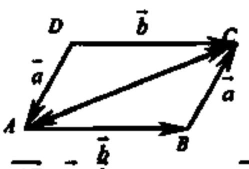


$\overline{AC}=\vec a+\vec b$



$\overline{CB}=\vec a-\vec b$, $\overline{BC}=\vec b-\vec a$

2. Законы сложения векторов:

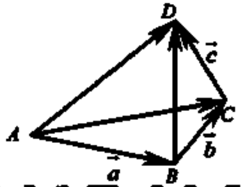


$\overline{AC}=\vec a+\vec b$,

$\overline{AC}=\vec b+\vec a$,

$\vec a+\vec b=\vec b+\vec a$

Переместительный закон

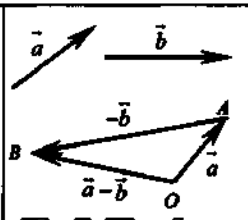


$\overline{AC}=\vec a+\vec b$, $\overline{AD}=(\vec a+\vec b)+\vec c$,

$\overline{BD}=\vec b+\vec c$, $\overline{AD}=\vec a+(\vec b+\vec c)$,

$(\vec a+\vec b)+\vec c=\vec a+(\vec b+\vec c)$.

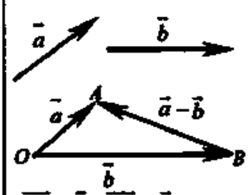
Сочетательный закон



$\overline{OA}=\vec a$, $\overline{AB}=-\vec b$

$\overline{OB}=\vec a+(-\vec b)=\vec a-\vec b$

а)



$\overline{OA}=\vec a$, $\overline{OB}=\vec b$

$\overline{BA}=\vec a-\vec b$

б)

Правило многоугольника можно сформулировать также следующим образом: если $A_1, A_2, \ldots A_n$ – произвольные точки, то $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$.

Это правило проиллюстрировано на рисунке для $n = 7$. Отметим, что если точки A_1 и A_n, то есть начало первого вектора и конец последнего, совпадают, то сумма векторов равна нулевому вектору.

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_4A_5} + \overrightarrow{A_5A_6} + \overrightarrow{A_6A_7} = \overrightarrow{A_1A_7}$$

Можно дать творческое задание на дом – объявить конкурс на лучший конспект темы.

V. Закрепление изученного материала

а) Применение знаний в стандартной ситуации.

№ 327 (*а, б, д*) (текст – см. учебник)

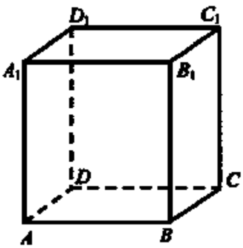


Рис. 1

(рис. 1).

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1D_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$;

б) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{B_1B} = \overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{B_1B} = \overrightarrow{C_1B}$;

д) $\overrightarrow{DB_1} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{DC_1}$.

№ 328а

Дан тетраэдр $ABCD$ (рис. 2).

Докажите, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$.

Решение: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$,

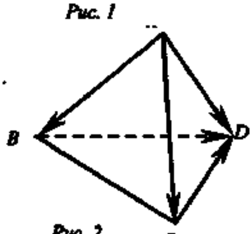


Рис. 2

следовательно, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$

№ 331а

Пусть $ABCD$ — параллелограмм, а O – произвольная точка пространства. *Докажите*, что $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$ (рис. 3).

Решение: $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{DC}$.

Так как $ABCD$ – параллелограмм, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, следовательно, $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$. В пространстве даны четыре точки A, B, C и D. Назовите вектор с началом и концом в данных точках, равный сумме векторов $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$.

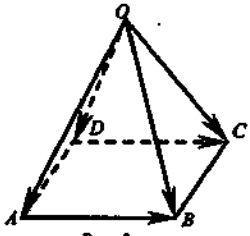


Рис. 3

Решение: $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) =$

$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA}) + \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}) + \overrightarrow{BD} =$

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \mathbf{0}$.

б) Самостоятельная работа обучающего характера с последующей самопроверкой (решение на обратной стороне доски)

№ 379, 380 (Текст – см. учебник)

(рис. 4)

а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$;

б) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$;

в) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=0$.

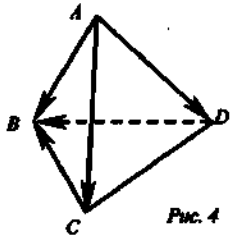


Рис. 4

(рис. 5)

а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1D_1}=\overrightarrow{AD_1}$;

б) $(\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{A_1A})+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB_1}+$
$+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AC_1}$;

в) $(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DB}$.

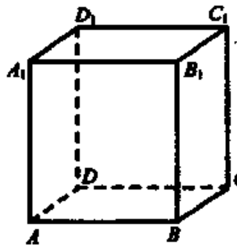


Рис. 5

VI. Подведение итогов

В конце урока желательно с помощью ребят перечислить понятия, правила, свойства, которые были рассмотрены на уроке и которые необходимо запомнить.

Домашнее задание

П. 36, 37.

I уровень: № 327 (*в, г*); 330 (*а, б*); 335 (*а, б*);

II уровень: № 327 (*е*); 330 (*в, г, д*); 335 (*в, г*);

№ 340; – конспект темы.

Урок 59. Умножение вектора на число

Цели урока:

1) рассмотреть правило умножения вектора на число и основные свойства этого действия, а так же их применение при решении задач;
2) повторить и систематизировать знания по теме «Векторы»;
3) совершенствовать навыки выполнения действий над векторами.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Контроль домашнего задания

На доске приготовить заранее чертежи к задачам № 327, 330 и вызвать двоих учеников для записи решений этих задач по уровням.

Кроме того, вызвать 1 ученика для записи и объяснения решения задачи № 335 и задачи № 340, если ребята справились с творческим заданием.

№ 327 (рис. 1)

в) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{B_1B}=\overrightarrow{C_1B}$;

г) $\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB_1}$;

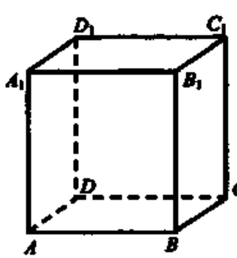


Рис. 1

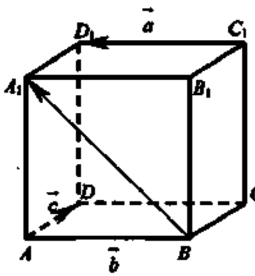


Рис. 2

№ 330 (рис. 2)

Нарисуйте параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и обозначьте векторы $\overrightarrow{C_1D_1}$, $\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{AD}$ соответственно через $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Изобразите на рисунке векторы: а) $\vec{a}-\vec{b}$; б) $\vec{a}-\vec{c}$; в) $\vec{b}-\vec{a}$; г) $\vec{c}-\vec{b}$; д) $\vec{c}-\vec{a}$

Решение:

а) $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{C_1D_1}-\overrightarrow{BA_1}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BA_1}=\overrightarrow{A_1A}$;

б) $\vec{a}-\vec{c}=\overrightarrow{C_1D_1}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$;

в) $\vec{b}-\vec{a}=\overrightarrow{BA_1}-\overrightarrow{C_1D_1}=\overrightarrow{BA_1}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA_1}$;

г) $\vec{c}-\vec{b}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BA_1}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA_1}=\overrightarrow{A_1C}$;

д) $\vec{c}-\vec{a}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{C_1D_1}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AC}$.

№ 335

а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{PQ}$;

б) $\overrightarrow{FK}+\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{QK}+\overrightarrow{PF}=\overrightarrow{AK}$;

в) $\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{FK}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{CP}$;

г) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{NM}=\vec{0}$.

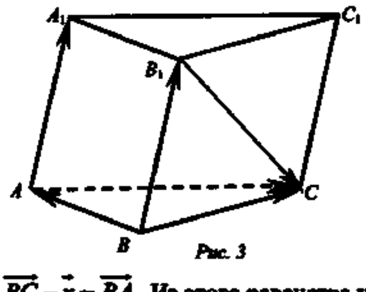


Рис. 3

№ 340. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Укажите вектор $\vec{x}$, начало и конец которого являются вершинами призмы, такой, что $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{B_1C}-\vec{x}=\overrightarrow{BA}$ (рис. 3).

Решение:

$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{B_1C}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1C}=\overrightarrow{BC}$. Поэтому нужно найти вектор $\vec{x}$, такой, что $\overrightarrow{BC}-\vec{x}=\overrightarrow{BA}$. Из этого равенства находим: $\vec{x}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$, или $\vec{x}=\overrightarrow{AC}$.

В это время обсудить конспекты (выполненные дома) и повторить в вопросно-ответной форме материал предыдущего урока: правила сложения и вычитания векторов, свойства сложения, правило многоугольника для суммы нескольких векторов.

III. Актуализация опорных знаний (задания для самостоятельного выполнения с последующей проверкой)

№ 1. Найти:

а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$;

б) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}$;

в) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CB}$;

г) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}$;

д) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$;

е) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AM}$;

ж) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BE}$;

з) $\overrightarrow{MT}-\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{AT}-\overrightarrow{AE}$.

(*Ответы*: а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{AD}$; г) $\vec{0}$; д) $\overrightarrow{DB}$; е) $\overrightarrow{MD}$; ж) $\overrightarrow{DE}$; з) $2\overrightarrow{ET}$.)

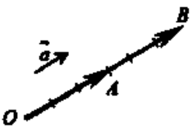
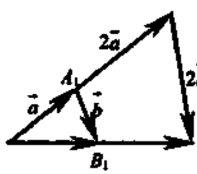
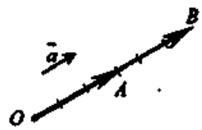
№ 2. Начертите неколлинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$. Постройте векторы: а) $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$; б) $\vec{y}=\vec{b}-\vec{c}$.

IV. Изучение нового материала

Сформулировать правило умножения вектора на число: $k\cdot\vec{a}=\vec{b}$; если $\vec{a}\neq\vec{0}$, то $|\vec{b}|=|k|\cdot|\vec{a}|$, $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ при $k\geq 0$; $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ при $k<0$. Если $\vec{a}=\vec{0}$, то $\vec{b}=\vec{0}$.

Подробно рассмотреть на примерах свойства умножения вектора на число и попросить ребят изобразить схему в тетрадях.

Умножение вектора на число

Сочетательный закон	Первый распределительный закон	Второй распределительный закон
$(kl)\vec{a}=k(l\vec{a})$	$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$	$(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$
		
$\overrightarrow{OA}=3\vec{a}$; $\overrightarrow{OB}=6\vec{a}$ $\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OA}=2\cdot(3\vec{a})$ $(2\cdot 3)\vec{a}=2\cdot(3\vec{a})$	$\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OB_1}=2(\vec{a}+\vec{b})$ $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{OB}=2\vec{a}+2\vec{b}$ $2(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}+2\vec{b}$	$\overrightarrow{OB}=5\vec{a}$ $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{OB}=3\vec{a}+2\vec{a}$ $(3+2)\vec{a}=3\vec{a}+2\vec{a}$

Обратить внимание учащихся на то, что так же, как и в планиметрии, можно доказать следующее утверждение: если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a}\neq\vec{0}$, то существует число k, такое, что $\vec{b}=k\vec{a}$. (рекомендовать повторить доказательство учащимся, проявляющим интерес к геометрии)

V. Закрепление изученного материала

1) Решение задач из учебника

Задача № 345

Точки E и F – середины сторон AB и BC параллелограмма $ABCD$, а O – произвольная точка пространства. Выразите вектор $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$ через вектор $\overrightarrow{EF}$ (рис. 4).

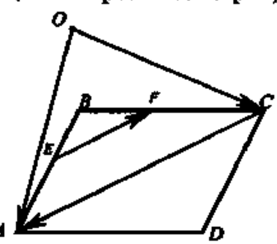


Рис. 4

Решение: $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CA}$. Так как EF – средняя линия треугольника ABC, то $EF\parallel$

AC и $EF = \dfrac{1}{2}AC$. Поэтому $\overrightarrow{EF} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OC} = -2\overrightarrow{EF}$.

Задача № 347

а) Упростите выражение $2(\vec{m}+\vec{n})-3(4\vec{m}-\vec{n})+\vec{m}$.

Решение: $2(\vec{m}+\vec{n})-3(4\vec{m}-\vec{n})+\vec{m}=2\vec{m}+2\vec{n}-12\vec{m}+3\vec{n}+\vec{m}=-9\vec{m}+5\vec{n}$.

Задача № 348

Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. (рис. 5). *Докажите*, что $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{B_1D} = 2\overrightarrow{BC}$.

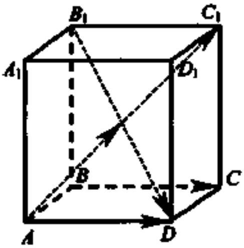


Рис. 5

Решение: Из рисунка видно, что $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{B_1D} = 2\overrightarrow{AO} + 2\overrightarrow{OD} = 2(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}) = 2) = 2\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$.

Практическая работа (выполняется на листочках и сдается на проверку)

1) Отметьте на прямой a три точки A, B и M так, что: а) $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$; б) $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{MB}$; в) $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{MB}$; г) $\overrightarrow{AM} = -3\overrightarrow{MB}$.
2) Точка O – произвольная точка пространства. Для каждого случая из *а–г* 1) выразите вектор $\overrightarrow{OM}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.
3) Точки A, B и M лежат на одной прямой, причем $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{MB}$. Найдите a, если для данных точек и произвольной точки O выполняется равенство: а) $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$; б) $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{OB}$; в) $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Постройте точки, удовлетворяющие каждому из этих равенств.

VI. Подведение итогов (блиц-опрос по вопросам):

– Что называется произведением ненулевого вектора на число?
– Что называется произведением нулевого вектора на число?
– Свойства умножения вектора на число.
– Справедливо ли утверждение: а) любые два противоположно направленных вектора коллинеарны; б) любые два коллинеарных вектора сонаправлены; в) любые два равных вектора коллинеарны; г) любые два сонаправленных вектора равны; д) если $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{c}$, $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{c}$.

Домашнее задание

I уровень – № 349, 351; II уровень – № 352, 353; творческое задание – № 385.

Решение домашних задач

№ 351

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$, а также $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны. Докажите, что коллинеарны векторы: а) $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{c}$; б) $\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{c}$; в) $\vec{a}+3\vec{b}$ и $\vec{c}$; г) $-\vec{a}+2\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Доказательство:

1 способ

$\vec{a}$ и $\vec{c}$ – коллинеарны, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – коллинеарны.

а) Прямые, на которых лежат $\vec{a}$ и $\vec{c}$, либо параллельны, либо совпадают. Прямые, на которых расположены $\vec{b}$ и $\vec{c}$, либо параллельны, либо совпадают. Две прямые, параллельные третьей, параллельны ($\vec{a} \parallel \vec{c}$, $\vec{b} \parallel \vec{c}$ значит, $\vec{a} \parallel \vec{b}$). Таким образом, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ расположены либо на нескольких прямых, либо на одной, то есть коллинеарны;

б) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – коллинеарны, $-\vec{b}$ коллинеарен $\vec{b}$, значит, $\vec{a} + (-\vec{b})$ коллинеарен и $\vec{a}$, и $\vec{b}$. По условию, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны, значит, $\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{c}$ тоже коллинеарны;

в) Так как $\vec{b}$ и $3\vec{b}$ коллинеарны, то $\vec{a} + 3\vec{b}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. По условию $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны, тогда $\vec{a} + 3\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны;

г) $\vec{a}$ и $-\vec{a}$ коллинеарны, поэтому $-\vec{a} + 2\vec{b}$ коллинеарен $\vec{b}$. По условию $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны, значит, $-\vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны.

2 способ

а) $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{c}$, $\vec{b} = \mu \cdot \vec{c}$, $\vec{c} = \frac{1}{\lambda}\vec{a}$, $\vec{c} = \frac{1}{\mu}\vec{b}$. Отсюда $\vec{a} + \vec{b} = \lambda \cdot \vec{c} + \mu \cdot \vec{c} +$

$+ \mu \cdot \vec{c} = (\lambda + \mu) \cdot \vec{c}$;

б) $\vec{a} - \vec{b} = \lambda \cdot \vec{c} - \mu \cdot \vec{c} = \vec{c}(\lambda - \mu)$, $(\lambda - \mu)\vec{c}$ и $\vec{c}$ коллинеарны;

в) $\vec{a} + 3\vec{b} = \lambda \cdot \vec{c} - 3\mu \cdot \vec{c} = \vec{c}(\lambda - 3\mu)$, $(\lambda - 3\mu)\vec{c}$ и $\vec{c}$ коллинеарны;

г) $-\vec{a} + 2\vec{b} = -\lambda \cdot \vec{c} + 2\mu \cdot \vec{c} = \vec{c}(2\mu - \lambda)$, $(2\mu - \lambda)\vec{c}$ и $\vec{c}$ коллинеарны.

№ 352

Векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ коллинеарны.

Докажите, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Доказательство: Примем $\vec{a} + \vec{b} = \vec{d}$, $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$. По условию, $\vec{d} = k \cdot \vec{c}$; $\vec{a} + \vec{b} = k(\vec{a} - \vec{b})$; $\vec{a} + \vec{b} = k \cdot \vec{a} - k \cdot \vec{b}$; $\vec{b}(1+k) = \vec{a}(k-1)$; $\vec{b} = \frac{k-1}{1+k}\vec{a}$, то есть $\vec{b} = 1 \cdot \vec{a}$, где $l = \frac{k-1}{k+1}$. Равенство $\vec{b} = l \cdot \vec{a}$ доказывает, что $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

№ 353

Векторы $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{a} - 3\vec{b}$ коллинеарны.

Докажите, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Доказательство: $\vec{a} + 2\vec{b} = \vec{d}$, $\vec{a} - 3\vec{b} = \vec{c}$. По условию, $\vec{d} = \lambda \cdot \vec{c}$, то есть $\vec{a} + 2\vec{b} = \lambda(\vec{a} - 3\vec{b})$; $\vec{a} + 2\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a} - \lambda \cdot 3\vec{b}$; $\vec{b}(2 + 3\lambda) = \vec{a}(\lambda - 1)$;

$\vec{b}\frac{\lambda-1}{2+3\lambda}\vec{a}=\mu\cdot\vec{a}$, где $\mu=\frac{\lambda-1}{2+3\lambda}$. Равенство $\vec{b}=\mu\cdot\vec{a}$ показывает коллинеарность $\vec{b}$ и $\vec{a}$.

Творческое задание

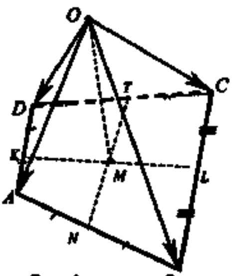


Рис. 6

№ 385

Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника *ABCD*, пересекаются в точке *M*. Точка *O* – произвольная точка пространства. Докажите, что справедливо равенство $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$ (рис. 6)

Доказательство:

1 способ.

Для произвольного ΔPQR $2P\vec{S}=P\vec{Q}+P\vec{R}$. Запишем равенство для каждой грани пирамиды *OABCD*: $2O\vec{K}=O\vec{D}+O\vec{A}$, $2O\vec{T}=O\vec{D}+O\vec{C}$, $2O\vec{L}=O\vec{C}+O\vec{B}$, $2O\vec{N}=O\vec{A}+O\vec{B}$. Сложив их, получим: $2(\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OT}+\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{ON})=2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$ или $\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OT}+\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$.

Для ΔOKL имеем $2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OL}$; для ΔOMN имеем $2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OT}+\overrightarrow{ON}$. Итак, $\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{ON}=2\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{OM}=4\overrightarrow{OM}$, поэтому $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$.

§ 3. КОМПЛАНАРНЫЕ ВЕКТОРЫ

(уроки 60–62)

Урок 60. Компланарные векторы. Правило параллелепипеда

Цели урока:

1) ввести определение компланарных векторов;
2) рассмотреть признак компланарности трех векторов и правило параллелепипеда, сложение трех некомпланарных векторов.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Постановка целей и мотивация урока

III. Объяснение нового материала

Определение

Векторы называются компланарными, если при откладывании их от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости. Любые два вектора компланарны; три вектора, среди которых два коллинеарны, также компланарны (объясните почему).

Пример: рис. 1.

На рис. 1 изображен параллелепипед. Векторы $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$ – компланарны, так как, если отложить от точки O вектор, равный $\overrightarrow{BB_1}$, то получится вектор $\overrightarrow{OC}$, а векторы $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OE}$ лежат в плоскости OCE. $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ – некомпланарны, так как вектор $\overrightarrow{OC}$ не лежит в плоскости OAB. Признак компланарности 3-х векторов: если вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то есть представить в виде: $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ (x, y – некоторые числа), то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – компланарны.

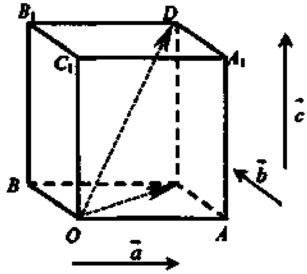


Рис. 1

Доказательство: Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны (рис. 2) (если коллинеарны – компланарность очевидна). Отложим от точки O векторы: $\overrightarrow{OA_1} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ лежат в плоскости OAB. В плоскости OAB лежат и векторы $\overrightarrow{OA_1} = x\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB_1} = y\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}$ лежит в той же плоскости. $\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} = \vec{c}$. Что и требовалось доказать. Обратное утверждение: если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ некомпланарны, то вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то есть $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, причем коэффициенты x и y определяются единственным образом.

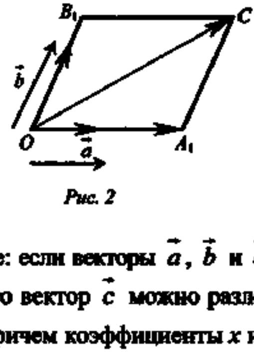


Рис. 2

Доказательство: (самостоятельно) на основании теоремы о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам.

1) $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – компланарны (по условию).

Если их отложить от точки A, то они будут лежать в одной плоскости.

2) Построим параллелограмм $ABCD$: $\overrightarrow{AC} = \vec{c} \Rightarrow \vec{c} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

3) $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{a}$ коллинеарны ($\vec{a} \neq \vec{o}$) $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = x \cdot \vec{a}$, аналогично $\overrightarrow{AD} = y \cdot \vec{b}$.

4) $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, что и требовалось доказать (единственность коэффициентов x, y доказать самостоятельно дома).

Правило параллелепипеда (для сложения трех некомпланарных векторов).

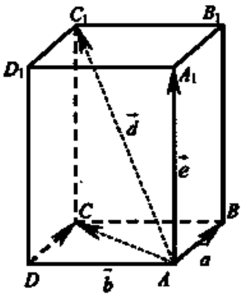


Рис. 3

Дано: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$; $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$; $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$; $\vec{d}$ – ? (рис. 3).

$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC_1}$;

$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

IV. Формирование знаний и умений

Устно – № 355 а) да; б) нет; в) да; г) нет.

У доски – *№ 356.*

Дано: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC}$; $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{FB}$ (рис. 4).

1) *Доказательство:* $2\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}$.

2) $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DC}$ – компланарны – ?

$\overrightarrow{FE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FC}) \Rightarrow 2\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FC} =$

$= (\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{BA}+$

$+\overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FD})$; $2\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}$

$\ldots \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BA} \ldots \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DC}$,

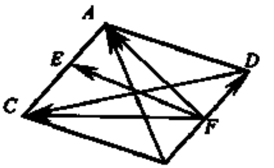


Рис. 4

согласно признаку компланарности, векторы $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DC}$ компланарны.

Решение упражнений № 359 а) $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DD_1} = (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}$

V. Подведение итогов

(по вопросам 13, 14, 15, стр. 92)

Домашнее задание

№ 358, 359(б); доп. 368, (а, б)

Ответ к д/з № 358 а) $\overrightarrow{AC_1}$, б) $\overrightarrow{DB_1}$, в) $\overrightarrow{DB_1}$, г) $\overrightarrow{A_1C}$, д) $\overrightarrow{BD_1}$.

№ 359 б) $\overrightarrow{B_1D_1} = \overrightarrow{A_1A} - \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{A_1D_1}$.

№ 368 а) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

б) $\overrightarrow{CM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

Урок 61. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам

Цель урока:

– рассмотреть теорему о разложении вектора по трем некомпланарным векторам.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Коллективная проверка домашнего задания.

III. Опрос

У доски – 2 ученика (1-й отвечает сразу, 2-й готовится)

1. ученик – компланарные векторы и правило параллелепипеда.
2. ученик – доказать признак компланарности 3-х векторов.
3. ученик – задача № 362.

Дано: $ABCD$ – тетраэдр; $BK = KC$. DK разложить по $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$ $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ (рис. 1).

Решение: K – середина; $\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{2}(2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

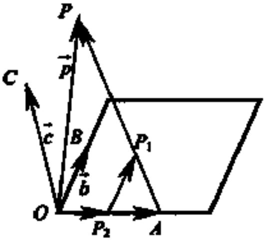


Рис. 1

IV. Объяснение нового материала

Если вектор $\vec{p}$ представлен в виде (1) $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, где x, y, z – некоторые числа, то говорят что вектор $\vec{p}$ разложен по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Числа x, y, z называются коэффициент разложения. Теорема: Любой вектор можно разложить по трем данным некомпланарным векторам, причем коэффициент разложения определяется единственным образом.

Доказательство: Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – данные некомпланарные вектора $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Отметим произвольную точку O и отложим от нее векторы (2); $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$; $\overrightarrow{OD} = \vec{p}$. Через т. P проведем прямую параллельную OC. $P_1 = c \cap AOB$ (если $P \in OC$, то в качестве P_1 возможен т. O). Через P_1 проведем P_1P_2 параллельную OB; $P_2 = c \cap OA$ (если $P_1 \in OB$ то в качестве P_2 возьмем точку O); $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{P_2P_1} + \overrightarrow{P_1P}$ (3). Векторы $\overrightarrow{OP_2}$ и $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{P_2P_1}$ и $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{P_1P}$ и $\overrightarrow{OC}$ коллинеарны, поэтому существуют числа x, y, z такие, что $\overrightarrow{OP} = x \cdot \overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{P_2P_1} = y \cdot \overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{P_1P} = z \cdot \overrightarrow{OC}$ подставляя в (3) получим: $\overrightarrow{OP} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC}$ учитывая (2) получаем $\vec{p} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + + z \cdot \vec{c}$.

Докажем единственность коэффициентов разложения. Допустим, что имеется ещё одно разложение вектора $\vec{p} = x_1 \cdot \vec{a} + y_1 \vec{b} + z_1 \cdot \vec{c}$. Вычитая это равенство из (1), получим $x\vec{a} - x_1\vec{a} + y\vec{b} + y_1\vec{b} + z\vec{c} - z_1\vec{c} = 0$. $(x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b} + (z - z_1)\vec{c} = 0$. Это равенство выполняется только тогда, когда $x - x_1 = 0$, $y - y_1 = 0$, $z - z_1 = 0$. Если предположить, например, что $z - z_1 \neq 0$, то из этого равенства получим $\vec{c} = \frac{x - x_1}{z - z_1}\vec{a} - \frac{y - y_1}{z - z_1}\vec{b}$, следовательно, векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарны (это противоречит условию теоремы).

Значит, наше предположение неверно, и $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$. Следовательно, коэффициенты разложения определяются единственным образом.

V. Формирование знаний и умений

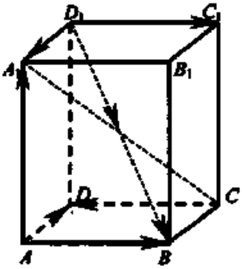


Рис. 2

У доски: ***№ 361.*** *Дано:* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипед; O – точка пересечения диагоналей. Разложить $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{D_1O}$ по векторам; $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ (рис. 2).

Решение: $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$;

1) $\overrightarrow{CD} = 0 \cdot \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AD}$;

2) $\overrightarrow{D_1B} = \overrightarrow{D_1D} + \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{D_1A_1}$; $\overrightarrow{D_1D} = \overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{D_1C_1} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{D_1A_1} = -\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{D_1B} = -\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{D_1O} = \frac{1}{2}\overrightarrow{D_1B}$, $\overrightarrow{D_1O} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

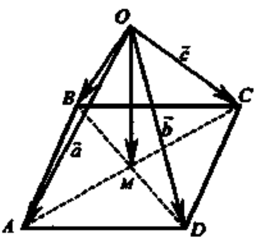


Рис. 3

№ 363. *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм, $M = DB \cap AC$; $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$; $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$; $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ (рис. 3)

Разложить $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OM}$ по $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Решение: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{DA}$;

1) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} = \vec{b} - \vec{c}$; $\overrightarrow{OD} = \vec{a} - (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$;

2) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}\vec{f} + 0 \cdot \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

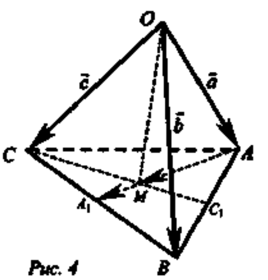


Рис. 4

№ 366. M – точка пересечения медиан, O – произвольная точка пространства (рис. 4).

Доказать: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

Решение: Пусть $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}}{2} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})$; $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. То $\overrightarrow{OM} = \vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{c} - \vec{a}) + (\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

VI. Подведение итогов

Домашнее задание

П. 41 № 362, 364, дополнительно № 365, 362.

Решение в учебнике (1 способ).

№ 364

$\overrightarrow{AK} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c} \, | \overrightarrow{AK} | = \frac{3}{2} m.$

№ 365

$\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + 0 \cdot \vec{c}; \ \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}.$

Урок 62. Зачет по теме «Векторы в пространстве»

Цель урока:

– выявить уровень знаний учащихся по теме «Векторы в пространстве».

Ход урока

I. Организационный момент

II. Проведение зачета

Карточки с заданиями
I уровень

Вариант II

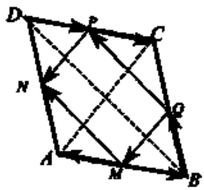
№ 1. Вопрос. Сформулируйте определения вектора, его длины, коллинеарности двух ненулевых векторов, равенства векторов. Проиллюстрируйте их, используя изображения параллелепипеда.

№ 2. Задача. На рисунке изображен тетраэдр *ABC*, ребра которого равны. Точки *M, N, P* и *Q* – середины сторон *AB, AD, DC, BC*; а) выпишите все пары равных векторов, изображенных на этом рисунке; б) определите вид четырехугольника *MNPQ*.

Решение:

а) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}, \ \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{QM}, \ \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{PC};$

б) Так как *NP* и *MQ* – средние линии в ΔADC и ΔABC, то $NP = MQ$, следовательно, *MN* – средняя линия ΔADB; а *PQ* – средняя линия ΔCBD; $MN = PQ = \frac{1}{2} BD$. Так как все ребра тетраэдра равны, то тетраэдр – правильный, а в правильном тетраэдре скрещивающиеся ребра взаимно перпендикулярны. Тогда, $BD \perp AC$;



$$\left.\begin{aligned} MN \parallel BD \parallel QP; \\ MQ \parallel NP \parallel AC; \\ BD \perp AC; \end{aligned}\right\}$$ четырехугольник *MNPQ* – квадрат.

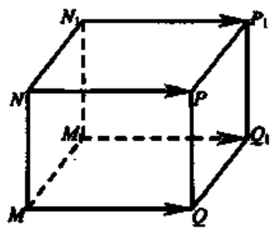
(*Ответ:* а) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}, \ \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{QM}, \ \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{PC}$; б) квадрат.)

№ 3. Задача. Дан параллелепипед $MNPQM_1N_1P_1Q_1$. Докажите, что $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{M_1Q_1} = \overrightarrow{N_1P_1} + \overrightarrow{NP}$.

Дано: $MNPQM_1N_1P_1Q_1$ – параллелепипед.

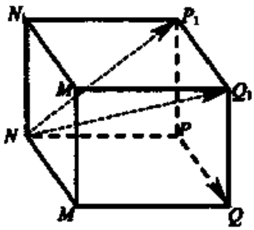
Доказать: $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{M_1Q_1} = \overrightarrow{N_1P_1} + \overrightarrow{NP}$.

Решение: $\overrightarrow{MQ} \parallel \overrightarrow{M_1N_1}$, $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{M_1N_1}$, так как $MNPQM_1N_1P_1Q_1$ – параллелепипед, а ребра MQ и M_1N_1 параллельны и равны. Аналогично доказывается $\overrightarrow{N_1P_1} \parallel \overrightarrow{NP}$ и $\overrightarrow{N_1P_1} = \overrightarrow{NP}$. $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{M_1Q_1} = \overrightarrow{N_1P_1}$, так как противоположные стороны параллелограммов $MNPQ$ и $M_1N_1P_1Q_1$ соответственно. Складывая левые и правые части равенств, получим $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{M_1Q_1} = \overrightarrow{N_1P_1} + \overrightarrow{NP}$, что и требовалось доказать.



Вариант II

№ 1. Вопрос. Расскажите о правиле треугольника сложения двух векторов. Проиллюстрируйте эти правила на рисунке.



№ 2. Задача. Упростите выражение: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NM}$.

Решение:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NM} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) + \left(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM}\right) + \overrightarrow{PQ} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}\right) + \left(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM}\right) + \overrightarrow{PQ} = \vec{0} + \vec{0} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ}$.

№ 3. Задача. Дан параллелепипед $MNPQM_1N_1P_1Q_1$. Докажите, что $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NP_1} = \overrightarrow{NQ_1}$.

Дано: $MNPQM_1N_1P_1Q_1$ – параллелепипед.

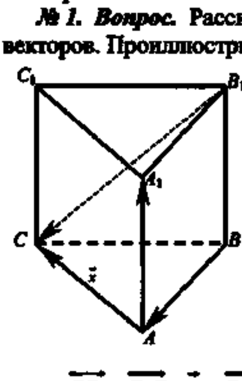
Доказать: $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NP_1} = \overrightarrow{NQ_1}$.

Решение: $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P_1Q_1}$; $\overrightarrow{P_1Q_1} + \overrightarrow{NP_1} = \overrightarrow{NP_1} + \overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{NQ_1}$. Таким образом, $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NP_1} = \overrightarrow{NQ_1}$.

II уровень

Вариант I

№ 1. Вопрос. Расскажите о правиле параллелограмма сложения двух векторов. Проиллюстрируйте это правило на рисунке.



№ 2. Задача. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Укажите вектор $\vec{x}$, начало и конец которого являются вершинами призмы, такой, что $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{B_1C} - \vec{x} = \overrightarrow{BA}$.

Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – треугольная призма. $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{B_1C} - \vec{x} = \overrightarrow{BA}$.

Найти: $\vec{x}$.

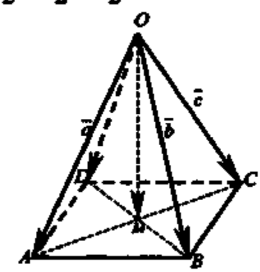
Решение: $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{B_1C} - \vec{x} = \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$, поэтому $\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1C} - \vec{x} = \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC} - \vec{x} = \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{x} + \overrightarrow{BA} \Rightarrow \vec{x} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$.

№ 3. *Задача.* Основанием пирамиды с вершиной O является параллелограмм $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке M. Разложите векторы $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OM}$ по векторам $\vec a=\overrightarrow{OA}$, $\vec{в}=\overrightarrow{OB}$ и $\vec c=\overrightarrow{OC}$.

Решение:

$\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DB}=\vec b$, $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}$; $\vec c+\overrightarrow{CB}=\vec b$, $\overrightarrow{CB}=\vec b-\vec c$; $\vec a+\overrightarrow{AB}=\vec b$, $\overrightarrow{AB}=\vec b-\vec a$; $\overrightarrow{DB}=\vec b-\vec c+\vec b-\vec a=2\vec b-\vec c-\vec a$, тогда $\overrightarrow{OD}=\vec b(2\vec b-\vec c-\vec a)=\vec b-2\vec b+\vec c+\vec a=$ $=\vec a-\vec b+\vec c$. Значит, $\overrightarrow{OD}=\vec a-\vec b+\vec c$; $\overrightarrow{OM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\vec b$; $\overrightarrow{OM}=\vec b-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=$ $=\vec b-\frac{1}{2}(2\vec b-\vec c-\vec a)=\vec b-\frac{1}{2}(2\vec b-\vec c-\vec a)==\vec b-\vec b+\frac{1}{2}\vec c+\frac{1}{2}\vec a=\frac{1}{2}\vec a+\frac{1}{2}\vec c.$

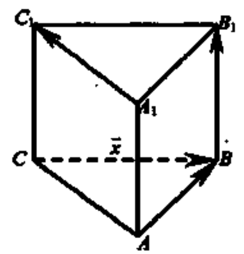
(*Ответ*: $\overrightarrow{OD}=\vec a-\vec b+\vec c$; $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\vec a+0\cdot\vec b+\frac{1}{2}\vec c$.)



Вариант II

№ 1. *Вопрос.* Расскажите о правиле многоугольника сложения нескольких векторов. Проиллюстрируйте его на рисунке.

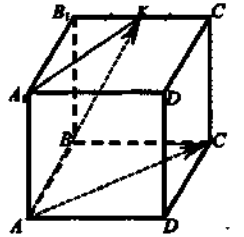
№ 2. *Задача.* Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Укажите вектор $\vec x$, начало и конец которого являются вершинами призмы, такой, что $\overrightarrow{AC_1}-\overrightarrow{BB_1}+\vec x=\overrightarrow{AB}$.



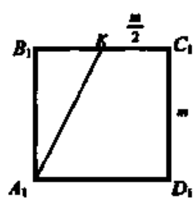
Решение: $\overrightarrow{AC_1}-\overrightarrow{BB_1}+\vec x=\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AC_1}+\vec x=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{AC_1}+\vec x=\overrightarrow{AB_1}\Rightarrow \vec x=\overrightarrow{C_1B_1}$, а так как $\overrightarrow{C_1B_1}=\overrightarrow{CB}$, $\vec x=\overrightarrow{CB}$. (*Ответ*: $\vec x=\overrightarrow{CB}$.)

№ 3. *Задача.* Точка K – середина ребра B_1C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D$. Разложите вектор $\overrightarrow{AK}$ по векторам $\vec a=\overrightarrow{AB}$, $\vec b=\overrightarrow{AD}$, $\vec c=\overrightarrow{AA_1}$ и найдите длину этого вектора, если ребро куба равно m.



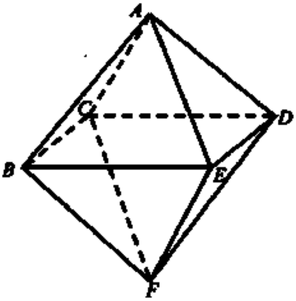
Решение: $|\vec a|=|\vec b|=|\vec c|=m$. Имеем: $\overrightarrow{AC}=\vec a+\vec b$; $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1K}=\overrightarrow{AK}$; $\vec a+\vec b+\vec c-\frac{1}{2}\vec b=\overrightarrow{AK}$; то есть $\overrightarrow{AK}=\vec a+\frac{1}{2}\vec b+\vec c$, так как $\overrightarrow{C_1K}=\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}=\frac{1}{2}(-\overrightarrow{AD})=$ $=-\frac{1}{2}\vec b$. Построим отрезок A_1K. Для ΔAA_1K по теореме Пифагора: $AK=\sqrt{AA_1^2+A_1K^2}$; $A_1K=$ $=\sqrt{m^2+\left(\frac{m}{2}\right)^2}=\frac{m\sqrt5}{2}$; $|AK|=\sqrt{m^2+\frac{5m^2}{4}}=$



$=\sqrt{\dfrac{9m^2}{4}}=\sqrt{\dfrac{2m}{2}}$. (*Ответ*: $\overrightarrow{AK}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{в}+\vec{c}$; $\left|\overrightarrow{AK}\right|=+\frac{3m}{2}$.)

III уровень

Вариант I



№ 1. Вопрос. Сформулируйте определение произведения вектора $\vec{a}$ на число k, сочетательный, первый и второй распределительные законы умножения вектора на число. Проиллюстрируйте их на примерах.

№ 2. Задача. На рисунке изображен правильный октаэдр. Докажите, что $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{DB}$.

Решение: $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BD}$, так как векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BF}$ и $\overrightarrow{FD}$ принадлежат одной плоскости, их длины равны, а ABFD – параллелограмм $\Rightarrow -\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{FB}=-\overrightarrow{DB}$, или $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{DB}$.

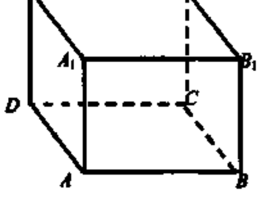
№ 3. Задача. Точки A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, AC, AB треугольника ABC, точка O – произвольная точка пространства. Докажите, что $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}= =\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

Решение: $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CA_1}=\overrightarrow{OA_1}$;

$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1B}=\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{CA_1}+\overrightarrow{A_1B}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$, значит, $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OB}\Rightarrow\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OA_1}$. Запишем аналогичные равенства для других граней. $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{OB_1}$ и $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{OC_1}$. Складывая эти три равенства, получим: $2(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=2(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1})$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}$, что и требовалось доказать.

Вариант II

№ 1. Вопрос. Сформулируйте определение компланарных векторов. Приведите примеры компланарных и некомпланарных векторов, используя изображение параллелепипеда.



№ 2. Задача. Дан параллелепипед $AABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите сумму векторов $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{CD}$.

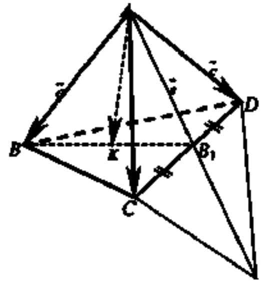
Решение:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+$

$+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DD_1})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{CD_1}=$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD_1}=\overrightarrow{AD_1}$. (*Ответ*: $\overrightarrow{AD_1}$.)

№ 3. *Задача.* В тетраэдре $ABCD$ точка K – середина медианы BB_1 грани BCD. Разложите вектор $\overrightarrow{AK}$ по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AD}$.



Решение: Проведем $\overrightarrow{AB_1}$, $KB=KB_1$, следовательно, имеем равенство: $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\overrightarrow{AB_1})$. Достроим ΔACD до параллелограмма; сложив $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ по правилу параллелограмма, получим, что их сумма $\vec{b}+\vec{c}$ равна диагонали параллелограмма, выходящей из вершины A. Но эта диагональ равна $2\overrightarrow{AB_1}$. Значит, $\vec{b}+\vec{c}=2\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{AB_1}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$. Таким образом, $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$. (*Ответ*: $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$.)

Дополнительные вопросы:

1. Сформулируйте и докажите утверждение, выражающее признак компланарности трех векторов.
2. Расскажите о правиле параллелепипеда сложения трех некомпланарных векторов. Проиллюстрируйте его на рисунке.
3. Сформулируйте теорему о разложении вектора по трем некомпланарным векторам.

III. Подведение итогов

ИТОГОВОЕ ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ГЕОМЕТРИИ

(урок 63-68)

Урок 63. Итоговое повторение. Аксиомы стереометрии и их следствия

Цель урока:

1) провести диагностику знаний учащихся;
2) повторить, систематизировать и обобщить знания по теме урока.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся

Учащиеся самостоятельно работают с таблицей 1 и с учебником (стр. 4–7) в течение 3-х минут.

III. Теоретический тест с последующей самопроверкой
(см. приложение)

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	д	д	в	в	б	г	а	б	д	в
II	г	д	а	а	б	г	а	г	б	в

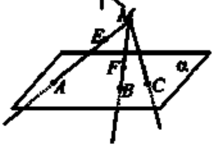
Обсуждаются ответы, которые вызывают вопрос у учащихся. При необходимости проводятся индивидуальные консультации.

IV. Решение задач

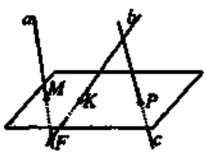
Сильные учащиеся работают самостоятельно. Учитель контролирует работу слабых учащихся, оказывая необходимую помощь, либо задачи решаются у доски по готовым чертежам, то есть ведется фронтальная работа с учащимися.

Задачи на готовые чертежах: 1, 3, 4 или 5, 6, 7.

1. *Дано:* точки A, B, C не лежат в одной плоскости.
Указать:
1) плоскости, которым принадлежат: а) прямая AB; б) точка F; в) точка C.
2) прямую пересечения плоскостей: а) ABC и ACD; б) ABD и DCF.

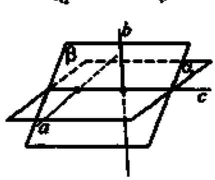


2. *Дано:* $M \notin \alpha$; $ABC \notin \alpha$.
1) $F \in \alpha$?
2) Может ли $E \in \alpha$?
3) Указать прямую пересечения плоскостей: а) α и MBA; б) ABM и BMC.
4) принадлежит ли AC плоскости MBC?



3. *Дано:* прямые a, b и с пересекают α в точках M, K и P.

Лежат ли прямые a, b и c в одной плоскости?



4. *Дано:* прямая c – линия пересечения плоскостей α и β. $a \in \alpha$, $b \in \beta$.

Доказать: a и b не лежат в одной плоскости.

Доказательство: Предположим противное: пусть a и b лежат в одной плоскости. Тогда c принадлежит этой плоскости. Через a и c проведем единственную плоскость α, которая $\in b$ – противоречие.

5. *Дано:* $\alpha \cap \beta = a$, A и $B \in \alpha$, $c \in \beta$.
Построить прямые пересечения плоскости ABC с плоскостями α и β.
6. *Дано:* Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$; $K \in DD_1$. Постройте: а) точку пересечения AK_1 с плоскостью α; б) $C_1 \cap \alpha$ в точке – ? в) прямую пересечения A_1C_1 и плоскости α.
Решение: а) A_1K и AB лежат в одной плоскости и не параллельны. Значит, $A_1K \cap AB = P$; $P \in AB \Rightarrow P \in \alpha$; б) $C_1K \cap \alpha$ в точке, расположенной на продолжении CB.
7. *Дано:* $MABC$ – тетраэдр, $P \in AM$, $AC = CB = AB = AM = MB = 6$, $D \in MB$, $E \in MC$, $F \in AB$, $AF = FB$.
1) Назовите прямую, по которой пересекаются плоскости: а) MAB и MFC; б) MCF и ABC.

2) Найти длину CF и $S_{\Delta ABC}$.

3) Как построить точку пересечения DE с плоскостью ΔABC?

8. *Дано:* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб; $P \in BB_1$, $B1P = PB$. 1) Построить точку пересечения D_1P и плоскости ABC. 2) Как построить линию пересечения AD_1P и ABB_1? 3) Вычислить длину отрезков AP и A_1D_1, если $AB = a$.

Ответы и указания:

3. Нет. Если бы a, b, и c лежали бы на одной прямой.
5. Прямая пересечения плоскостей ABC и β проходит через точку C и точку пересечения прямых AB и a, если $AB \cap a = F$, то $(ABC) \cap \beta = CF$.
6. (в) C_1K продолжить до пересечения с CB, пусть $C_1K \cap CB = M$, $M \in \alpha$, пусть $A_1K \cap AB = N$, $N \in \alpha \Rightarrow MN = A_1KC_1 \cap \alpha$.
7. 1. а) $(MAB) \cap (MFC) = MF$, так как $M \in$ MAB, $M \in MFC$, $F \in MAB$;

   б) $(MCF) \cap (ABC) =$ FC, аналогично. 2. в) $FC = BC\sin 60° = 6\dfrac{\sqrt{3}}{2} =$

   $= 3\sqrt{3}$ (см), так как ΔFBC – прямоугольный, $\angle F = 90°$; CF – медиана и высота ΔABC. 3. DE и BC лежат в одной плоскости. Пусть они пресекаются в точке K, так как $K \in BC$, значит, $K \in ABC$.
8. Решение: $AP = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, $AD_1 = a\sqrt{2}$.

Количество задач достаточно для работы в классе и дома. Поэтому отставшие от классной работы ученики, задачи решают дома.

IV. Подведение итогов

Домашнее задание

2; 4; 8; повторить п. 1 (4–11).

Урок 64. Параллельность прямых и плоскостей

Цель урока:

– повторить определения параллельных прямых, прямой и плоскости; основные свойства, связанные с этими определениями.

Ход урока

I. Проверка домашнего задания

II. Решение задач

1. По готовому рисунку (устно): а) докажите, что $KM \parallel EF$; б) найдите KM, если $EF = 8$ см (рис. 1).

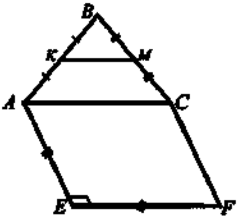


Рис. 1

Решение:

а) KM – средняя линия ΔABC, значит, $KM \parallel AC$; $ACFE$ – квадрат, значит $AC \parallel EF$; $KM \parallel AC$; $EF \parallel AC$, значит, $KM \parallel EF$ (если две прямые параллельны третьей, то они параллельны);

б) EF = AC = 8 см; $KM = \frac{1}{2}AC$ (по свойству средней линии); KM = 4 см.

– Какие прямые называются параллельными в пространстве? (если они лежат в одной плоскости и не пересекаются). Привести примеры.

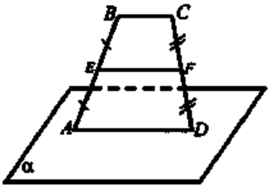


Рис. 2

2. $ABDC$ – трапеция, $AD \subset \alpha$, E и F – середины AB и CD соответственно. Докажите, что $EF \parallel \alpha$ (рис. 2).

Решение: EF – средняя линия трапеции $ABCD$; $EF \parallel AD$, $AD \subset \alpha$, значит, $EF \parallel \alpha$ (если прямая, не лежащая в плоскости параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости).

– Какая прямая называется параллельной плоскости? (Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.) Привести примеры.

3. Через вершины A и C параллелограмма $ABCD$ проведены параллельные прямые A_1A и C_1C, не лежащие в плоскости параллелограмма.

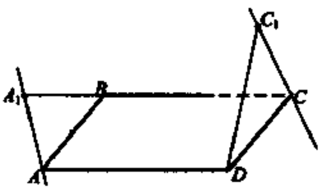


Рис. 3

Докажите параллельность плоскостей A_1AB и C_1CD (рис. 3).

Решение: $AA_1 \parallel CC_1$ по условию; $AB \parallel CD$ по определению параллелограмма; $(A_1AB) \parallel (C_1CD)$ по признаку параллельности плоскостей (Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.)

– Какие плоскости называются параллельными? (Если они не пересекаются.) Привести примеры.

Задача (письменно)

Концы двух пересекающихся отрезков $AC \| BD$ лежат на двух параллельных плоскостях, причем расстояния между точками одной плоскости равны.

а) *Докажите,* что $AB \parallel CD$; б) Один из углов четырехугольника $ABCD$ равен 65°. Найдите остальные углы.

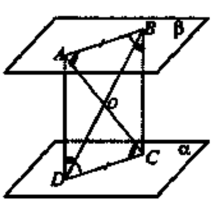


Рис. 4

Дано: $AC \cap BD = O$, $\alpha \parallel \beta$, $\{A, B\} \subset \beta$, $\{D, C\} \subset \alpha$; $AB = DC$, $\angle ADC = 65°$ (рис 4).

Доказать: $AB \parallel CD$.

Найти: а) углы четырехугольника $ABCD$.

Доказательство:

1. $AC \cap DB = 0$, значит, существует γ, $\{AC, DB\} \subset \gamma$.
2. $\gamma \cap \alpha = DC$, $\gamma \cap \beta = AB$.
3. $DC \parallel AB$ по свойству параллельных плоскостей 1 (если две параллельные плоскости параллельны третьей, то линии их пересечения параллельны);

б) *Решение*:

1. $\Delta AOB = \Delta COD$ (II признак: $AB = DC$ по условию, $\angle ODC = \angle OBA$, $\angle OCD = \angle OAD$ – внутренние накрест лежащие для $AB \parallel DC$ и секущих AB, AC).
2. $AO = OC$, $OD = OB$.
3. $\Delta AOD = \Delta COB$ (I признак: $DO = OB$, $AO = OC$, $\angle AOD = \angle COB$ – вертикальные).
4. $\angle ODA = \angle OBC$, значит, $AD \parallel BC$, так как это внутренние накрест лежащие углы для прямых AD и BC и секущей DB.
5. $ADCB$ – параллелограмм по определению.
6. $\angle D = \angle B$, $\angle A = \angle C$, $\angle D + \angle A = 180°$. Если $\angle D = 65°$, то $\angle B = 65°$, $\angle A = \angle C = 180° - 65° = 115°$.

(*Ответ*: $\angle A = \angle C = 115°$, $\angle D = \angle B = 65°$.)

III. Подведение итогов

Учащиеся отвечают на вопрос: «Какие определения и свойства, связанные с понятием параллельности, сегодня прозвучали?».

Домашнее задание

С. 32, вопросы 1–3, 5, 7, 11; № 99 (или № 103 дополнительно).

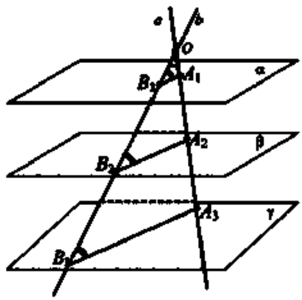


Рис. 5

№ 99. *Дано:* $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$; $a \cap b = 0$, $a \cap \alpha = A_1$, $a \cap \beta = A_2$, $a \cap \gamma = A_3$, $b \cap \alpha = B_1$, $b \cap \beta = B_2$, $b \cap \gamma = B_3$ (рис 5).

Доказать: $\frac{B_1A_1}{B_2A_2} = \frac{B_2A_2}{B_3A_3} = \frac{B_1A_1}{B_3A_3}$.

Доказательство:

1. Так как а ∩ в, то $\exists \gamma, \{a, в\} \subset \gamma$.
2. $\gamma \cap \alpha = B_1A_1$, $\gamma \cap \beta = B_2A_2$, $\gamma \cap \beta = B_3A_3$; $B_1A_1 \parallel B_2A_2 \parallel B_3A_3$ по свойству 1.
3. $\Delta OB_1A_1 \sim \Delta OB_2A_2 \sim \Delta OB_3A_3$ (по двум углам).
4. $\frac{B_1A_1}{B_2A_2} = \frac{B_2A_2}{B_3A_3} = \frac{B_1A_1}{B_3A_3}$.

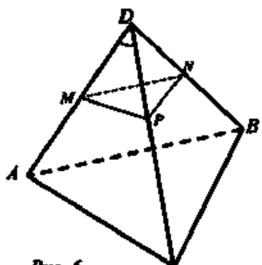


Рис. 6

№ 103. *Дано:* $ABCD$ – тетраэдр $M \in AD$, $P \in DC, N \in DB$; $\frac{DM}{MA} = \frac{DN}{NB} = \frac{DP}{PC}$. (рис. 6).

Доказать: $(MNP) \parallel (ABC)$.

Найти: $S_{\Delta MNP}$, если $S_{\Delta ABC} = 10$ см^2 и $\frac{DM}{MA} = \frac{2}{1}$.

Доказательство:

1. Если $\frac{DM}{MA} = \frac{DN}{NB} = \frac{DP}{PC}$, то $\frac{DM}{DA} = \frac{DN}{DB} = \frac{DP}{DC}$.
2. $\Delta MDP \sim \Delta ADC$ (по пропорциональности двух сторон и $\angle D$ общий); $\Delta PDN \sim \Delta CDB$, $\Delta MND \sim \Delta ABD$.
3. $\angle DMP = \angle DAC$ – соответственные для MP и AC и секущей AD. Значит, $MP \parallel AC$. Аналогично, $PN \parallel CB$, $MN \parallel AB$.

4. (MNP) || (ACB) по свойству параллельности плоскостей.

Решение:

1. $\dfrac{DM}{MA}=\dfrac{2}{1}$, $\dfrac{DM}{DA}=\dfrac{2}{3}$.

2. $\Delta MPN \sim \Delta ACB$ (по пропорциональности трех сторон); $k=\dfrac{2}{3}$.

3. $S\Delta MNP = k^2 \cdot S_{\Delta ABC}$; $S_{\Delta MNP}=\dfrac{4}{9}10=\dfrac{40}{9}=4\dfrac{4}{9}$.

(*Ответ*: $4\dfrac{4}{9}$ см^2.)

Урок 65. Повторение (теорема о трех перпендикулярах, угол между прямой и плоскостью)

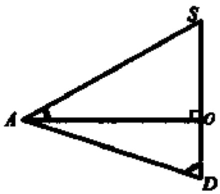
Цель урока: в ходе решения задач повторить формулы для вычисления площадей поверхностей призмы, пирамиды.

Ход урока

I. Повторение (8 мин.)

1) Вспомним формулы для вычисления площадей поверхности призмы, пирамиды.

$S_{полн.}=S_{бок.}+S_{осн.}$; $S_{бок.призм.}=P_{осн.}\cdot H$, $S_{бок.пирам.}=\dfrac{P}{2}l$, l – апофема. Основание – многоугольник (может быть n-угольник). $S_{осн.}$ находим по формулам.

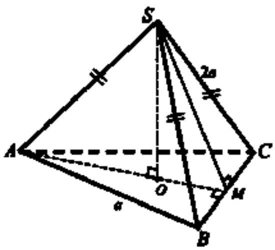


2) Теорему о трех перпендикулярах.

II. Закрепление материала (23 мин.)

№ 640. Дано: правильная треугольная пирамида; a – сторона основания; $2a$ – боковое ребро.

Найти: R – описанной сферы; r – вписанной сферы.

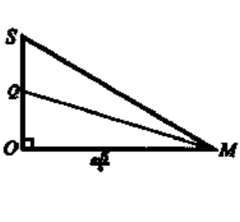


Решение: 1) $SO=h$; O – центр основания пирамиды; M – середина BC; AM – высота в ΔABC; $AO=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $OM=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Центры общих сфер лежат на прямой SO: $SO\perp(ABC)$.

1) R – радиус описанной сферы. Продолжим SO до пересечения с описанной сферой в точке D. SD – диаметр шара, $\angle SAD=90°$.

$\Delta OAS\sim\Delta ODA$; $OD=\dfrac{AO^2}{OS}=\dfrac{a^2}{3h}\left(AO=\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)$.



$2R=SD=SO+OD=h+\dfrac{x^2}{3h}=\dfrac{3h^2+a^2}{2h}$;

$R = \dfrac{3h^2+a^2}{2\cdot 3h} = \dfrac{3h^2+a^2}{6h}$. Проведем апофему SM.

2) ΔSMC: $SM = \sqrt{SC^2 - CM^2} = \sqrt{4a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$; $OM = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$;

из ΔSOM: $h = SO = \sqrt{SM^2 - OM^2} = \sqrt{\dfrac{15a^2}{4} - \dfrac{a^2}{12}} = \sqrt{\dfrac{44a^2}{12}} = a\sqrt{\dfrac{11}{3}}$;

$R = \dfrac{3a^2\cdot 11/3 + a^2}{6a\sqrt{11/3}} = \dfrac{12a}{6\sqrt{11/3}} = \dfrac{\sqrt{3}a}{\sqrt{11}} = \dfrac{2a\sqrt{33}}{11} = \dfrac{2\sqrt{33}}{11}a$.

3) Найдем r – радиус вписанной сферы. Q – центр вписанного шара. ΔSOM: QM – биссектриса $\angle SMO$; $QO = r$; $SM = \dfrac{x\sqrt{15}}{2}$. По свойству биссектрисы внутреннего угла $\dfrac{OQ}{SQ} = \dfrac{OM}{SM}$; $\dfrac{r}{h-r} = \dfrac{a\sqrt{3}\cdot 2}{6x\sqrt{15}} = \dfrac{1}{3\sqrt{5}}$;

$h = a\sqrt{\dfrac{11}{3}}$; $r(3\sqrt{5}+1) = h$; $r = \dfrac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3}(3\sqrt{5}+1)} = \dfrac{(3\sqrt{5}-1)}{4\sqrt{33}}x\cdot a$.

Домашнее задание (1 мин.)

Задачи: № 634, 641.

III. Ознакомиться с приложением 2 «Об аксиомах геометрии»
(работа с учебником – 8 мин.)

Урок 66. Контрольная работа № 5

Цель урока:

– проверка знаний и умений учащихся.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Решение контрольной работы
(см. приложение)

III. Подведение итогов

Краткое решение

I уровень

Вариант I

1. а) $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$ (правило многоугольника), $|\overrightarrow{AB}|$ это длина отрезка AB. Рассмотрим треугольник ABC: угол B равен 90°, используя теорему Пифагора, получим

$AB = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{169-25} = 12$см.

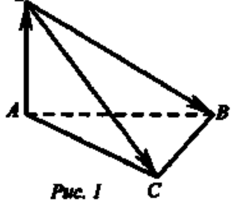


Рис. 1

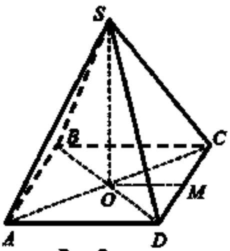


Рис. 2

б) Угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и проекцией прямой на эту плоскость. Искомый угол $\angle SBA = 45°$ из треугольника SAB $\angle A = 90°$, SA = AB = 12 см, тогда треугольник равнобедренный и углы при основании 45°.

2. а) В основании пирамиды $ABCD$ квадрат $AC = 8\sqrt{2}$ см, $AC^2 = 2AD^2$, $AD = 8$ см.

б) OM – радиус вписанной окружности, $OM = \dfrac{AD}{2} = 4$ см.

в) Треугольник SOM: $\angle O = 90°$ $SM = \dfrac{OM}{\cos 60°} = \dfrac{4}{0{,}5} = 8$ см.

г) $S_п = S_б + S_{осн.} = 64 + 16 \cdot 8 = 192$ см^2.

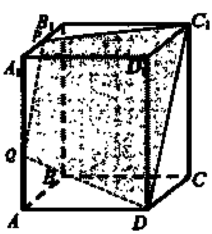


Рис. 3

3. а) Плоскость сечения пересекает грань AA_1D_1D по прямой DQ, а плоскость AA_1B_1B по прямой QP.

б) QP принадлежит плоскости AA_1B_1B, но эта плоскость параллельна плоскости DD_1C_1C. Параллельные плоскости пересекаются третьей по параллельным прямым. Поэтому плоскость сечения пересечет плоскость DD_1C_1C по прямой, параллельной QP и проходящей через точку D, через DC_1.

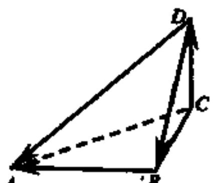


Рис. 4

Вариант II

1. а) $\overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}$, длину отрезка найдем по теореме Пифагора

$CA = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$ см.

б) Треугольник ACS равнобедренный и прямоугольный, $\angle A = 45°$.

2. Треугольник SOP: $OP = SO \cdot \mathrm{ctg}60° =$

$= 4\sqrt{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 4$, $SP = \dfrac{SO}{\sin 60°} \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2} = 8$.

$AD = OP \cdot 2 = 8$ см; $S = 64 + 0{,}5 \cdot 32 \cdot 8 = 192$ см^2.

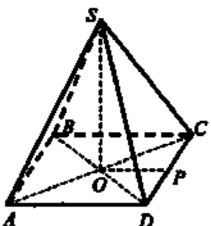


Рис. 5

3. AB принадлежит сечению, тогда $ABCD$ пересекается по AB, и AA_1B_1B пересекается по AB. BB_1C_1C пересекает по BQ. Плоскости $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ параллельны, тогда сечение пересекает верхнюю грань по прямой, параллельной AB, QE параллельно AB, E – середина A_1D_1. $EQBA$ – искомое сечение, параллелограмм.

II уровень

Вариант I

1. $BD \perp AO$ (диагонали ромба пересекаются под прямым углом) и $SO \perp BD$ по теореме о трех перпендикулярах. Тогда $BD \perp SAO$,

так как перпендикулярна двум пересекающимся прямым из этой плоскости (рис. 7). $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{SO}$. Найдем длину отрезка SO по теореме Пифагора $SO^2=(3\sqrt{3})^2+3^2=27+9=36$

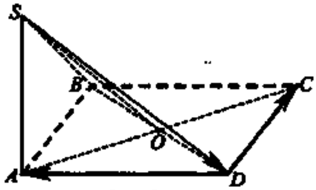


Рис. 7

$SO^2=(3\sqrt{3})^2+3^2=27+9=36$, $SO=6$ см. Плоский угол двугранного угла $SDBA$: $\angle SOA=60°$, из треугольника SOA sin-$SOA=\frac{AS}{SB}=\frac{3\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Рассмотрим треугольник SAB, равнобедренный, углы при основании равны, $\angle S=120°$, $\angle A=\angle B=30°$ (рис. 8).

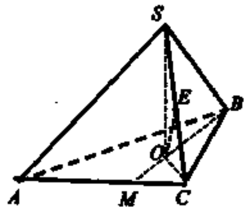


Рис. 8

Рассмотрим треугольник SOC: $OM=SM=$ $=ME=3$ см, как радиусы описанной окружности. $SC=6$ см.

Рассмотрим треугольник SCM, $\angle M=90°$ $\angle C=30°$, $SM=3$ см и $MC=3\sqrt{3}$, в треугольнике SAC: $AC=6\sqrt{3}$. $S_o=\frac{(6\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}=54\sqrt{3}$;

$S_o=9\sqrt{3}\cdot 3=27\sqrt{3}$; $S=54\sqrt{3}+27\sqrt{3}=81\sqrt{3}$.

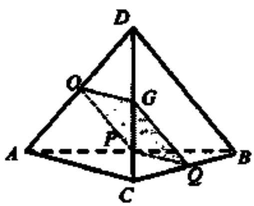


Рис. 9

3. O – середина AD и Q – середина BC (рис. 9). Провели PO, GQ параллельно BD. $POGQ$ – искомое сечение, параллелограмм. По теореме о средней линии имеем

$QG=\frac{1}{2}AC$; $PB=\frac{1}{2}AC$; $OP=\frac{1}{2}BD$;

$QC=\frac{1}{2}BD$ – противолежащие стороны равны из равенства ребер тетраэдра, сечение параллелограмма.

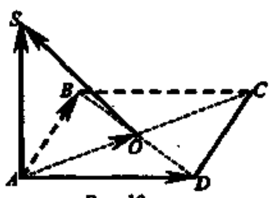


Рис. 10

Вариант II

1. (рис. 10) $AO\perp BD$; $BD\perp SO$, плоскости SBD и SAO перпендикулярны по признаку. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$; $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}$; $\overrightarrow{AO}+$ $+\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{AS}$; $AO=25-16=9$; $AO=3$;

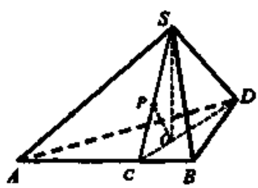


Рис. 11

$AS=36-9=27$; $AS=3$; $\sin SOA=\frac{3\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\angle SOA=60°$.

2. Рассмотрим треугольник SOC: $OP = SP = CP = 3$ см, как радиусы описанной окружности, $SC = 6$ см и $\angle C = 60^\circ$, тогда $OC = SC\cos 60^\circ = 3$. Вычислим AB, зная что OC – радиус вписанной окружности, $AB =$

$$= AB = 2\cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3};\quad S_o = (6\sqrt{3})^2\frac{\sqrt{3}}{4} = 27\sqrt{3};\quad S_b = 9\sqrt{3}\cdot 6 = 54\sqrt{3};$$

$$S = 27\sqrt{3} + 54\sqrt{3} = 81\sqrt{3}.$$

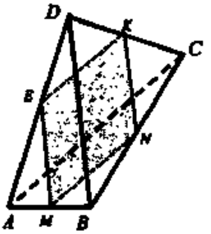


Рис. 12

В плоскости ABC провели через точку M прямую параллельную AC, она пересекла BC в точке N. По теореме Фалеса, N – середина BC, MN – средняя линия в треугольнике ABC, тогда MN параллельно AC.

1) В плоскости ADC провели через точку E прямую, параллельную AC, она пересекла DC в точке K. По теореме Фалеса, K – середина DC; EK – средняя линия в треугольнике ADC, тогда EK параллельно AC.
2) MN параллельно AC и EK параллельна AC по теореме о двух параллельных прямых третьей, тогда MN параллельно AK. Провели через параллельные прямые MN и AK плоскость, она существует и единственна. MN и KE – искомое сечения. Сечение параллельно AC по признаку параллельности прямой и плоскости.

III уровень

Вариант I

1. а) $SB \perp AB$ и $AB \perp BC$, тогда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $AB \in SBC$, $AB \in SAB$, тогда по признаку перпендикулярности плоскостей $SAB \perp SBC$; б) Пусть $\overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BS} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{BC} = \vec{c}$. По правилу сложения векторов

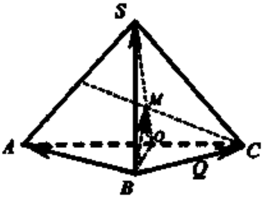
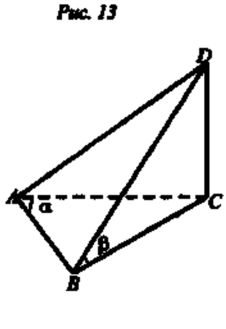


Рис. 13

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SM} = \overrightarrow{BS} + \frac{2}{3}\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{BS} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB});$$

$$\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BS} = \vec{a} - \vec{b};\qquad \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BS} = \vec{c} - \vec{b};$$

$$\overrightarrow{BM} = \vec{b} + \frac{1}{3}(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} + \vec{b}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).$$



1) Рассмотрим треугольник BDC: $\angle B = 90^\circ$, $BD = a\,\mathrm{tg}\beta$; $DC = \dfrac{a}{\cos\beta}$.
2) Рассмотрим $AB = \dfrac{a}{\sin\alpha}$; $AC = \dfrac{a\cos\alpha}{\sin\alpha}$.
3) Рассмотрим треугольник DBC:
$$S = \frac{1}{2}BD\cdot AB = \frac{1}{2}a\,\mathrm{tg}\beta\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2\mathrm{tg}\beta}{\sin\alpha}.$$
4) Рассмотрим треугольник DCA: $\angle C = 90^\circ$, так как DC перпендикулярно по теореме о трех перпендикулярах.

$$S3=\frac{1}{2}DC\cdot AC=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\cos\beta}\cdot\frac{a\cos\alpha}{\cos\beta\sin\alpha}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a2\text{ctg}\alpha}{\cos\beta}.$$

5) $S_{бок.}\frac{1}{2}a^2\text{tg}\beta+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2\text{tg}\beta}{\sin\alpha}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2\text{ctg}\alpha}{\cos\beta}.$

2. 1) В грани SCD провели NK параллельно SD. K – середина CS.
   2) В грани SAD провели PK параллельно SD. М – середина SA.
   3) $PNKM$ – искомое сечение.

Вариант II

1. 1) $AC\perp BD$, так как медиана в равнобедренном треугольнике ABC и высота. Треугольник ASC равнобедренный, $BA=BC$ являются проекциями SA и SC. Тогда AC перпендикулярно плоскости SBD, значит, плоскости SAC и SBD тоже перпендикулярны.

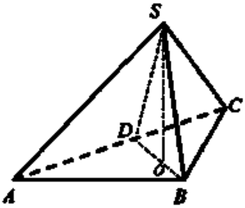


Рис. 15

$$\overrightarrow{SM}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{SB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{SB}+\frac{2}{3}\left(\frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}{2}\right)=\overrightarrow{CB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC});$$

2) $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}$; $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SB}$; $\overrightarrow{SM}=\overrightarrow{SB}+$

$+\frac{1}{2}(\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}).$

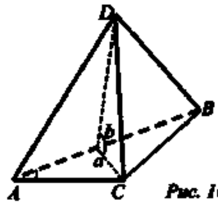


Рис. 16

$AC=c\cdot\cos\alpha$; $BC=c\cdot\sin\alpha$. $CD=\sqrt{AD\cdot DB}$;

$$AD=\frac{AC^2}{AB}=\frac{C^2\cos^2\alpha}{c}=c\cos^2\alpha;$$

$$BD=\frac{BC^2}{AB}=\frac{c^2\sin^2\alpha}{c}=c\sin\alpha;\ \ CD=\sqrt{c2\sin2\alpha\cos\alpha}=c\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$SD=\frac{CD}{\cos\beta}\frac{c\sin\alpha}{\cos\beta};\ \ S_1=\frac{1}{2}c\cos\alpha c\sin\alpha\ \cos\alpha\,\text{tg}\beta=\frac{1}{2}c^2\cos^2\alpha\ \sin\alpha\,\text{tg}\beta;$$

$$S_2=\frac{1}{2}c\sin\alpha\cdot\ \ c\cdot\sin\alpha\ \cos\alpha\,\text{tg}\beta=\frac{1}{2}c^2\sin^2\alpha\ \cos\alpha\,\text{tg}\beta;$$

$$S_3=\frac{1}{2}\frac{c^2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\beta};\ S_2=\frac{1}{2}c\sin\alpha c\cdot\left(\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\text{tg}\beta+\sin\alpha\cdot\text{tg}\beta+\cdot\right.$$

$$\left.+\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos\beta}\right).$$

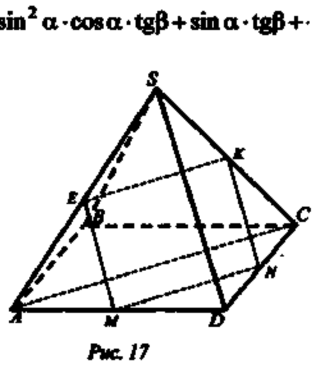


Рис. 17

2. 1) провели в плоскости ACD, MN параллельно AC;
   2) в треугольнике SAC провели EK параллельно AC;
   3) $EKNM$ – искомое сечение.

Урок 67. Повторение. Векторы в пространстве, их применение к решению задач

Цели урока:

1) повторение и обобщение знаний по теме;
2) совершенствование навыков построения чертежей;
3) развитие логического мышления, пространственного воображения.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Повторение теоретического материала

а) Примерные вопросы для повторения (желательно, чтобы учащиеся были ознакомлены с ними заранее).

Опрос проводится в форме «Продолжите фразу!»

Например, учитель начинает: «Два вектора называются коллинеарными, если...», ученик продолжает: «...они лежат на одной прямой или на параллельных прямых» или даёт какое-либо свое определение. Спорные ответы обсуждаются.

Что называется вектором? Нулевым вектором? Длиной вектора?

Чему равна длина нулевого вектора? Какие векторы называются коллинеарными? Сонаправленными? Противоположно направленными? Какие векторы называются равными? Сколько векторов, равных данному, можно отложить от данной точки?

- Что называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$?
- Правило треугольника. Свойства сложения.
- Правило параллелограмма. Правило многогранника.
- Какие векторы называются противоположными?
- Что называется произведением ненулевого вектора на число?
- Что называется произведением нулевого вектора на число?
- Свойства умножения вектора на число.
- Справедливо ли утверждение: а) любые два противоположно направленных вектора коллинеарны; б) любые два коллинеарных вектора сонаправлены; в) любые два равных вектора коллинеарны;
- Признак компланарности векторов.
- Компланарны ли векторы: а) a, b, $2a$ и $3b$; б) a, b, $a + b$, $a - b$?
- Известно, что векторы a, b и c компланарны. Компланарны ли векторы а) a, $2b$, $3c$; б) $a + b$, $a + 2c$, $2b - 3c$?
- Точки A, B и C лежат на окружности, а точка O не лежит в плоскости этой окружности. Могут ли OA, OB и OC быть компланарными?

III. Работа по готовым чертежам

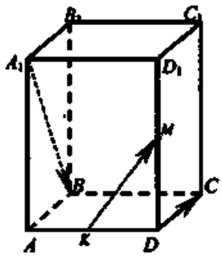


Рис. 1

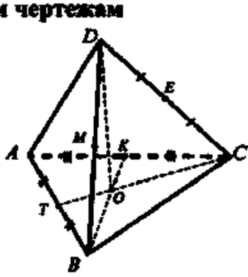


Рис. 2

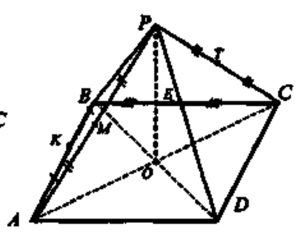


Рис. 3

В целях экономии времени необходимо чертежи на доске выполнить заранее.

Их могут выполнить 3 ученика во время фронтальной работы с классом по вопросам для повторения.

1. В прямом параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки K и M – середины ребер AD и DD_1 соответственно. Запишите векторы с началом и концом в вершинах параллелепипеда, которые:
   а) противоположно направлены вектору $\overrightarrow{KM}$;
   б) сонаправлены с вектором $\overrightarrow{DC}$;
   в) имеют длину, равную длине вектора $\overrightarrow{A_1B}$.
2. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ точки E, M, T и K – середины соответственно ребер DC, DB, BA и AC.
   а) Перечислите пары противоположно направленных векторов, не лежащих на одной прямой и с началом и концом в точках E, M, T и K.
   б) Перечислите пары равных векторов с началом и концом в точках E, M, T и K.
   в) Перечислите векторы, имеющие равные длины, с концами в точках E, M, T и K.
3. В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ точки K, M, T и E – середины соответственно ребер AB, PA, PC и BC.
   1) Перечислите пары сонаправленных векторов с концами в точках K, M, T, E.
   2) Перечислите пары равных векторов с концами в точках K, M, T и E.
   3) Перечислите векторы, имеющие равные длины, с концами в точках K, M, T и E.

IV. Геометрический диктант

(Выполняется на отдельных листочках, которые сдаются на проверку.)

1. Нарисуйте параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.
2. Найдите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{CA_1}$; $\left[\overrightarrow{CA_1}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D_1C_1}\right]$.
3. Найдите вектор, равный $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{C_1D_1}-\overrightarrow{BB_1}$; $\left[\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{C_1B_1}\right]$.
4. Представьте вектор $\overrightarrow{BC_1}$ в виде разности двух векторов, один из которых вектор $\overrightarrow{BD_1}$; $\left[\text{вектор } \overrightarrow{D_1B}\right]$.
5. Упростите выражение: $MN - PQ - NM + PT + RQ + TR$; $\left[\overrightarrow{LP}+\overrightarrow{MS}+\overrightarrow{EN}-\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PL}+\overrightarrow{ST}\right]$.
6. Упростите выражение: $3(\vec{a}+\vec{b})-4(2\vec{a}-\vec{b})+\vec{a}$; $\left[\vec{m}+3(2\vec{m}-\vec{n})-2(\vec{m}-\vec{n}).\right]$.

V. Решение задач

№ 1. Дан треугольник ABC. $D \in |BC|$, $|BD| : |DC| = 1 : 2$; $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Выразите вектор $\overrightarrow{BD}$ через векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (рис. 4).

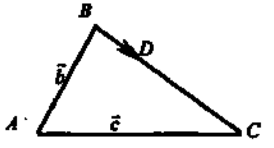


Рис. 4

Решение: $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\vec{c}-\vec{b}$; $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}(\vec{c}-\vec{b})=\frac{1}{3}\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{b}$. (*Ответ:* $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{b}$.)

№ 2. Дан параллелепипед $PLMNP_1L_1M_1N_1$. Разложите вектор $\overrightarrow{L_1N}$ по векторам $\overrightarrow{P_1P}$, $\overrightarrow{P_1L}$ и $\overrightarrow{P_1N_1}$ (рис. 5).

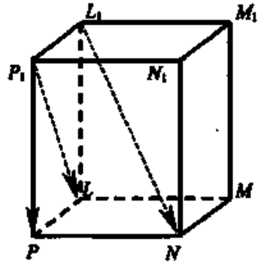


Рис. 5

Решение: $\overrightarrow{L_1N}=\overrightarrow{L_1P_1}+\overrightarrow{P_1P}+\overrightarrow{PN}$;

$\overrightarrow{L_1P_1}=\overrightarrow{LP}=\overrightarrow{P_1P}-\overrightarrow{P_1L}$; $\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{P_1N_1}$; $\overrightarrow{L_1N}=\overrightarrow{P_1P}-\overrightarrow{P_1L}+\overrightarrow{P_1P}+\overrightarrow{P_1N_1}=2\overrightarrow{P_1P}-\overrightarrow{P_1L}+\overrightarrow{P_1N_1}$. (*Ответ:* $\overrightarrow{L_1N}=2\overrightarrow{P_1P}-\overrightarrow{P_1L}++\overrightarrow{P_1N_1}$.)

№ 3. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Вычислите скалярные произведения: а) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$, б) $\overrightarrow{C_1D}\cdot\overrightarrow{B_1A}$ (рис. 6).

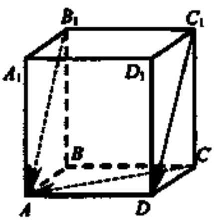


Рис. 6

Решение:

1) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{CB}|\cdot\cos\varphi$; $|\overrightarrow{CA}|=a$, $|\overrightarrow{CB}|=a\sqrt{2}$,

$\varphi=45°$; $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=a\cdot a\sqrt{2}\cdot\cos45°=$

$=a^2\cdot\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}=a^2$.

2) $\overrightarrow{C_1D}\cdot\overrightarrow{B_1A}=|\overrightarrow{C_1D}|\cdot|\overrightarrow{B_1A}|\cdot\cos0°=a\sqrt{2}\cdot1=2a^2$.

(*Ответ:* 1) a^2; 2) $2a^2$.)

Домашнее задание

I уровень

№ 1. Дан параллелограмм $ABCD$. $K\in[BC]$, $|BK|=|KC|$, $\overrightarrow{AB}=m$, $\overrightarrow{AD}=n$. Выразите вектор $\overrightarrow{AK}$ через векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$.

№ 2. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $\overrightarrow{B_1A_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{B_1C_1}=\vec{b}$, $\overrightarrow{B_1B}=\vec{c}$. Разложите вектор $\overrightarrow{B_1M}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, если $M=[AC]\cap[BD]$.

№ 3. На стороне AB треугольника ABC взята такая точка M, что $|AM|:|MB|=1:1$. Вычислите $|MC|$, если $|AC|=a$, $|BC|=2a$, $ACB=60°$.

№ 4. Вычислите угол между векторами ($\vec{a}=3\vec{p}+2\vec{q}$ и $\vec{\ }=\vec{p}+5\vec{q}$, где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ – единичные взаимно перпендикулярные векторы.

II уровень

№ 1. Дан параллелограмм $KLMN$. $A\in[MN]$, $|MA|:|AN|=1:2$; $\overrightarrow{KL}=\vec{a}$, $\overrightarrow{KN}=\vec{b}$. Выразите вектор $\overrightarrow{AK}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

№ 2. Дан тетраэдр $ABCD$, $K \in [BC]$, $|CK| = |KB|$, $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Выразите вектор $\overrightarrow{DK}$ через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

№ 3. Точка K – середина стороны треугольника DEF. Вычислите расстояние $|FK|$, если $|DF| = m$, $|FE| = m\sqrt{2}$, $DFE = 135°$.

№ 4. Вычислите угол между векторами $\vec{m}$, $\vec{q} = \vec{m} - 2\vec{n} + 3\vec{p}$, где $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$ – единичные взаимно перпендикулярные векторы.

Ответы к домашнему заданию:

I.	II.
1. $\frac{1}{2}\vec{n} + \vec{m}$;	1. $-\left(\frac{2}{3}\vec{a} + \vec{b}\right)$;
2. $\overrightarrow{B_1M} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$;	2. $0{,}5\left(\vec{b} + \vec{c} - 2\vec{a}\right)$;
3. $\frac{a}{2}\sqrt{7}$;	3. $\frac{1}{2}m$;
4. $45°$.	4. $\cos\varphi = -\frac{3}{13}$.

Урок 68. Заключительный урок-беседа по курсу геометрии

Цели урока:

1) формировать и развивать эвристическое мышление;
2) показать какую роль играет геометрия в развитии общества;
3) систематизировать знания в истории развития геометрии.

Ход урока

I. Вступительное слово учителя
(на экране диапроектора слайд № 1)

Геометрия – одна из самых, а может, самая древняя наука, ее возраст исчисляется тысячелетиями. В геометрии много формул, фигур, теорем, задач, аксиом. Это своего рода «автографы», оставленные учеными своим потомкам. Они вечны, так как на них запечатлены великие идеи, не проходящие идеи. Давайте совершим маленькое путешествие во времени.

1. Остановка «Древний Египет»

Ученик: Древний Египет считается первым государством, оставившим самые ранние математические тексты. Древние греки, достижения которых лежат в основе современной науки, считали себя учениками египтян. Геродот писал: «Египетские жрецы говорили, что царь разделил землю между всеми египтянами, дав каждому по равному прямоугольному участку; из этого он создал себе доходы, приказав ежегодно вносить налог. Если же река отнимала что-нибудь, то царь посылал людей, которые должны измерить участок и уменьшить налог». Первой книгой, содержащей геометрические задачи, считается папирус Райнда, который датируется IXX веком до нашей эры. Что умели древние египтяне:

1) Умели точно находить площадь поля прямоугольной, треугольной, трапециевидной формы.

2) Умели строить прямоугольный треугольник при помощи веревки, разделенной узлами на 12 равных частей.
3) Знали, что отношение длины окружности к диаметру – число постоянное, приближенное значение этого числа – π.
4) Среди пространственных тел самым египетским можно считать пирамиду, ведь именно такую форму имеют знаменитые усыпальницы фараонов, хотя довольно близко они знакомы с кубом, параллелепипедом, призмой и цилиндром, умели вычислять объем этих фигур.
5) Умели вычислять объем усеченной пирамиды, в основании которых квадраты по формуле $V = \frac{\left(a^2 + ab + b^2\right)h}{3}$.

2. Остановка «Древняя Греция»

Ученик: Пожалуй, дату появления геометрии, как науки, можно определить довольно точно – VI век до нашей эры.

Древнегреческий ученый Фалес Милетский считается одним из первых геометров. Он был причислен к семи мудрецам древности, среди которых он первый. Фалес решил следующие задачи.

1) Предложил способ определения расстояния до корабля на море.
2) Вычислил высоту египетской пирамиды Хеопса по длине отбрасываемой тени.
3) Доказал равенство углов при основании равнобедренного треугольника.
4) Ввел понятие движения, в частности поворота.
5) Доказал второй признак равенства треугольников и впервые применял его в задаче.
6) Теорема Фалеса о равных отрезках, отсекаемых параллельными прямыми на сторонах угла.

Пример: задача об измерении высоты пирамиды.

Однажды, отправившись по торговым делам в Египет, он задержался там на несколько лет. Случилось так, что фараон пожелал узнать высоту пирамиды, но никто не мог ее определить. Фалес смог легко справиться с задачей.

Выбрав день и час, когда его собственная тень стала равной его росту, он измерил тень, отбрасываемую пирамидой, и установил, что длина тени от центра основания пирамиды до ее вершины была равна высоте этой пирамиды. Фараон и его приближенные изумились такому достаточно простому решению.

3. Остановка «Школа Евклида»

Евклид Александрийский. О нем известно очень мало. Вот два эпизода связанные с его именем.

Рассказывают, что египетский царь Птолемей I пожелал лично познакомиться с прославленным математиком и с его не менее известными сочинениями. Он милостиво выслушал доказательство двух теорем, но в начале третьей с ужасом воскликнул: «Неужели нет других путей для того, чтобы понять эти вещи?» На это Евклид с достоинством ответил: «Нет, в математике даже для царей нет других путей!» Евклид является непревзойденным систематизатором, педагогом и популяризатором науки. Своими учебниками (то есть книгами «Начала») он охватил всю элементарную математику той эпохи. «Начала» состоят из 13 книг. Первые четыре посвящены геометрии на плоскости. Каждую книгу он начинает с пяти аксиом и постулатов. Вспомните их! В первой книге излагается планиметрия прямолинейных фигур: устанавливаются их свойства, заканчивается прямой и обратной теоремой Пифагора. Во второй книге излагается основы геометрической алгебры. Третья книга посвящена свойствам круга, в четвертой строятся правильные n-угольники при $n = 3, 4, 5, 6, 10, 15$. Исключительное изящное построение правильного 15-угольника принадлежит самому Евклиду. 11 книга посвящена стереометрии. Она содержит основные теоремы о прямых и плоскостях в трехмерном пространстве, задачи на построение, например как опустить перпендикуляр из данной точки на данную плоскость. 12 книга посвящена решению задачи о квадратуре круга. 13 книга излагает учение о правильных многогранниках. В целом творение Евклида величественно. Созданная им система просуществовала более двух тысяч лет. Вплоть до XX века геометрию преподавали по популярным переводам этой книги. Но последующие математики не во всем соглашались с системой аксиом и определений и пытались ее улучшить. Некоторые оказались ненужные, например, что прямые углы равны. Это очевидно из других аксиом. Особенное неудовлетворение всегда вызывал пятый постулат, утверждавший: что через любую точку плоскости можно провести только одну прямую параллельную данной. Многие считали ее теоремой и пытались ее неудачно доказать.

Учитель: Всегда ли это верно? Ответить на этот вопрос смогли лишь через две тысячи лет.

4. Остановка «Геометрия Лобачевского»

Ученик: В 1826 году великий русский математик Николай Иванович Лобачевский поставил точку в проблеме пятого постулата. Вместо него он принял допущение, согласно которому в плоскости можно построить, по крайней мере, две прямые, не пересекающиеся с a. Дальнейшие его рассуждения привели его к новой безупречной геометрической системе, называемой сейчас геометрией Лобачевского. В его геометрии сумма углов треугольника меньше 180°, в ней нет подобных фигур. В ней существуют треугольники с попарно параллельными сторонами. Все это непривычно и необычно. $c \parallel a$; $b \parallel a$.

Рис. 1

Но геометрия Лобачевского – геометрия Вселенной, геометрия бесконечного пространства, таящего в себе множество нераскрытых тайн.

Но несмотря на то, что возраст геометрии исчисляется тысячелетиями, геометрия и сейчас продолжает бурно развиваться.

Учитель: Геометрия – молодая наука. Ее уникальность в том, что некоторые самые современные достижения геометрической науки доступны школьникам. Вот одно из них.

Ученик: Рассмотрим несколько задач на пространственное воображение, изображение и соображение...

1) Может ли рисунок служить изображением многогранника с тремя четырехугольными гранями и двумя треугольными? (рис. 2).

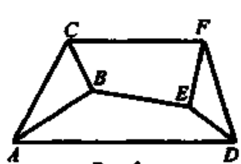


Рис. 2

Ответ: Нет. Прямые AB, BE, CF должны пересекаться в одной точке.

2) На рисунке изображена пирамида, в которой проведены два отрезка, соединяющие точки на противоположных ребрах. Можно ли определить по рисунку, пересекаются эти отрезки или нет?

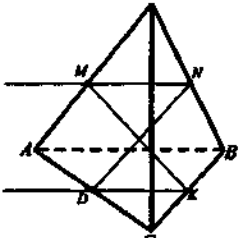


Рис. 3

Ответ: Можно. Отрезки MN и DK пересекаются, то есть лежат в одной плоскости, когда точка пересечения прямых, которым отрезки принадлежат, лежит на прямой AB, либо они параллельны.

3) Каждое ребро тетраэдра поделили на три равные части и через точки деления провели плоскости, параллельные граням. На сколько и каких частей они разрезают тетраэдр.

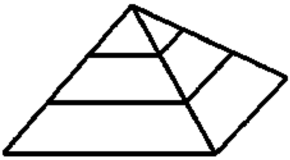


Рис. 4

Ответ: На 15 частей: 11 тетраэдров, втрое меньших, и 4 правильных октаэдра.

Учитель: Любая решенная в геометрии проблема порождает ряд новых. Что будет дальше, мы не знаем. Быть может, сейчас седой ученый совершает доказательство очередной теоремы. А может быть, это кто-нибудь из вас!

II. Подведение итогов

ПРИЛОЖЕНИЯ

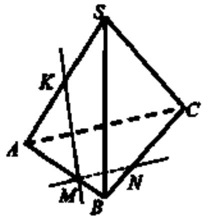
Приложение 1. Контрольные и самостоятельные работы

Урок 5. Самостоятельная работа

I уровень

Вариант I

1. Пользуясь данным рисунком, назовите: а) четыре точки, лежащие в плоскости SAB; б) плоскость, в которой лежит прямая MN; в) прямую, по которой пересекаются плоскости SAC и SBC.
2. Точка C – общая точка плоскости α и β. Прямая проходит через точку C. Верно ли, что плоскости α и β пересекаются по прямой c? Ответ объясните.
3. Через прямую a и точку A можно провести две различные плоскости. Каково взаимное расположение прямой a и точки A? Ответ объясните.



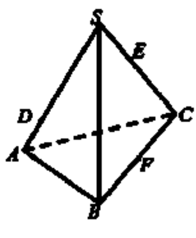
Вариант II

1. Пользуясь данным рисунком, назовите: а) четыре точки, лежащие в плоскости ABC; б) плоскость, в которой лежит прямая KN; в) прямую, по которой пересекаются плоскости SAC и CAB.
2. Плоскости α и β имеют три общие точки. Верно ли, что эти плоскости совпадают? Ответ объясните.
3. Через A, B и C можно провести две различные плоскости. Каково взаимное расположение точек A, B и C? Ответ объясните.

II уровень

Вариант I

1. Пользуясь данным рисунком, назовите: а) две плоскости, содержащие прямую DE; б) прямую, по которой пересекаются плоскости AEF и SBC; в) плоскость, которую пересекает прямая SB.
2. Прямые a, b и c имеют общую точку. Верно ли, что данные прямые лежат в одной плоскости? Ответ объясните.
3. Плоскости α и β пересекаются по прямой c. Прямая a лежит в плоскости α и пересекает плоскость β. Каково взаимное расположение прямых a и c? Ответ объясните.



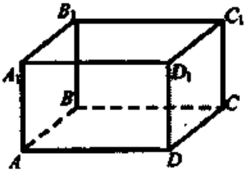
Вариант II

1. Пользуясь данным рисунком, назовите: а) две плоскости, содержащие прямую EF; б) прямую, по которой пересекаются плоскости BDE и SAC; в) плоскость, которую пересекает прямая AC.
2. Прямые a, b и c попарно пересекаются. Верно ли, что данные прямые лежат в одной плоскости? Ответ объясните.
3. Плоскости α и β пересекаются по прямой c. Прямая a лежит в плоскости α и пересекает прямую c. Каково взаимное расположение прямой a и плоскости β? Ответ объясните.

III уровень

Вариант I

1. Пользуясь данным рисунком, назовите: а) две плоскости, содержащие прямую B_1C; б) прямую, по которой пересекаются плоскости B_1CD и AA_1D_1; в) плоскость, не пересекающуюся с прямой CD_1.
2. Четыре прямые попарно пересекаются. Верно ли, что если любые три из них лежат в одной плоскости, то все четыре прямые лежат в одной плоскости? Ответ объясните.



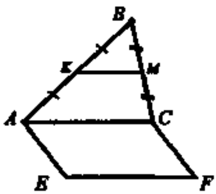
3. Вершина C плоского четырехугольника $ABCD$ лежит в плоскости α, а точки A, B и $Д$ не лежат в этой плоскости. Прямые AB и $AД$ пересекают плоскость α в точках B_1 и $Д_1$ соответственно. Каково взаимное расположение точек C, B_1 и $Д_1$? Ответ объясните.

Вариант II

1. Пользуясь данным рисунком, назовите: а) две плоскости, содержащие прямую AB_1; б) прямую, по которой пересекаются плоскости $AДC_1$ и A_1B_1B; в) плоскость, не пересекающуюся с прямой BC_1.
2. Три различные плоскости имеют общую точку. Верно ли, что данные имеют общую прямую? Ответ объясните.
3. Точка $Д$ не лежит в плоскости α. Прямые a и b проходят через точку $Д$ и пересекают плоскость α в точках A и B соответственно. Прямая c не проходит через точку $Д$, пересекается с a и b и пересекает плоскость α в точке C. Каково взаимное расположение точек A, B и C? Ответ объясните.

Урок 9. Самостоятельная работа обучающего характера (с оказанием индивидуальной дифференцируемой помощи)

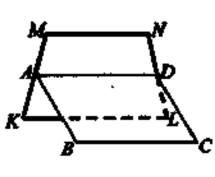
I уровень



Вариант I

1. Треугольник ABC и квадрат $AEFC$ не лежат в одной плоскости. Точки K и M – середины отрезков AB и BC соответственно.
   а) *Докажите*, что $KM \parallel EF$.
   б) *Найдите* KM, если $AE = 8$ см.
2. Плоскость α проходит через основание AD трапеции $ABCD$. Точки E и F – середины отрезков AB и CD соответственно. *Докажите*, что $EF \parallel \alpha$.

Вариант II



1. Квадрат $ABCD$ и трапеция $KMNL$ не лежат в одной плоскости. Точки A и D – середины отрезков KM и NL соответственно.
   а) *Докажите*, что $KL \parallel BC$.
   б) *Найдите* BC, если $KL = 10$ см, $MN = 6$ см.
2. Плоскость α проходит через сторону AC треугольника ABC. Точки D и E – середины отрезков AB и BC соответственно. *Докажите*, что $DE \parallel \alpha$.

Вариант II

Вариант I

1. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Точки E, F, M, K – середины отрезков AB, BC, CD, AD соответственно.
   а) *Докажите*, что $EFMK$ – параллелограмм.
   б) *Найдите* периметр $EFKM$, если $AC = 6$ см, $BD = 8$ см.
2. Точка А лежит в плоскости α, параллельной прямой a. Через точку A проведена прямая b, параллельная прямой a. *Докажите*, что прямая b лежит в плоскости α.

Вариант II

1. Точка А не лежит в плоскости треугольника BCD. Точки P, R, S и T – середины отрезков AB, AD, CD и BC соответственно.
   а) *Докажите*, что $PRST$ – параллелограмм.
   б) *Найдите* AC, если $BD = 6$ см, а периметр $PRST$ равен 14 см.
2. Прямые a и b параллельны. Через точку B, лежащую на прямой b, проведена плоскость α, параллельная прямой a. *Докажите*, что плоскость α проходит через прямую b.

III уровень

Вариант I

1. Точка M, лежащая вне плоскости ΔABK, соединена с его вершинами. D и E – точка пересечения медиан треугольников MAB и MBK соответственно.
   а) *Докажите*, что $ADEK$ – трапеция.
   б) *Найдите* DE, если $AK = 14$ см.
2. Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 не лежат в одной плоскости и пересекаются в точке O, являющейся серединой каждого из них. *Докажите*, что прямая AB параллельна плоскости A_1CB_1.

Вариант II

1. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. K и M – точки пересечения медиан треугольников ADB и DBC соответственно.
   а) *Докажите*, что $KM \parallel AC$.
   б) *Найдите* AC, если $KM = 6$ см.
2. Через точку O – точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ – проведена прямая KM, не лежащая в плоскости ABC, причем O – середина отрезка KM. *Докажите*, что прямая KB параллельна плоскости AMD.

Урок 10. Проверочная самостоятельная работа

I уровень

Вариант I

1. В ΔABC на стороне AB выбрана точка D, такая, что $BD : BA = 1 : 3$. Плоскость, параллельная прямой AC и проходящая через точку D, пересекает отрезок BC в точке D_1.
   а) *Докажите*, что $\Delta DBD_1 \sim \Delta ABC$.
   б) *Найдите* AC, если $DD_1 = 4$ см.
2. Плоскости α и β пересекаются по прямой C. Плоскость γ, параллельная прямой C, пересекает плоскости α и β по прямым a и b соответственно. Докажите, что $a \parallel \beta$ и $b \parallel \alpha$.

Вариант II

1. Точка D лежит на отрезке AB, причем $BD : BA = 1 : 4$. Через точку A проведена плоскость α, через точку D – отрезок DD_1, параллельный α. Прямая BD_1, пересекает плоскость α в точке C.
   а) *Докажите* подобие ΔDBD_1 и ΔABC.
   б) *Найдите* DD_1, если $AC = 12$ см.
2. Параллельные прямые a и b лежат в плоскости γ. Через прямую a проведена плоскость α, а через прямую b – плоскость β так, что α и β пересекаются по прямой c. Докажите, что $c \parallel \gamma$.

II уровень

Вариант I

1. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ выбрана точка A_1 так, что $DA_1 = 4$ см. Плоскость, параллельная диагонали AC, проходит через точку A_1 и пересекает сторону CD в точке C_1.
   а) *Докажите*, что $\Delta C_1DA_1 \sim \Delta ABC$.
   б) *Найдите* AC, если $BC = 10$ см. $A_1C_1 = 6$ см.
2. *Докажите*, что если каждая из двух пересекающихся плоскостей параллельна данной прямой, то линия их пересечения также параллельна этой прямой.

Вариант II

1. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ выбрана точка C_1 так, что $C_1B = 3$ см. Плоскость, параллельная диагонали AC, проходит через точку C_1 и пересекает сторону AB в точке A_1.
   а) *Докажите*, что $\Delta ADC \sim \Delta C_1BA_1$.
   б) *Найдите* AD, если $A_1C_1 = 4$ см, $AC = 12$ см.
2. Точка S не лежит в плоскости параллелограмма $ABCD$. *Докажите*, что линия пересечения плоскостей SAB и SCD параллельна плоскости параллелограмма.

III уровень

Вариант I

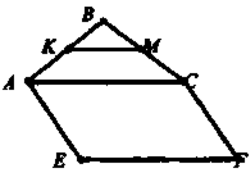
1. Точка M не лежит в плоскости параллелограмма $ABCD$. На отрезке AM выбрана точка E так, что $ME : EA = 2 : 3$.
   а) *Постройте* точку F – точку пересечения прямой MB с плоскостью CDE.
   б) *Найдите* AB, если $EF = 10$ см.
2. Через прямую a проведена плоскость α, а через прямую b – плоскость β. Плоскости α и β пересекаются по прямой C. *Докажите*, что если c не пересекается с a и b, то $a \parallel b$.

Вариант II

1. Точка M не лежит в плоскости ромба $ABCD$. На отрезке BM выбрана точка F так, что $MF : FB = 1 : 3$.
   а) *Постройте* точку K – точку пересечения прямой MC с плоскостью AFD.
   б) *Найдите* FK, если $AD = 16$ см.
2. Прямая C не имеет общих точек с плоскостью γ. Через прямую c проведены плоскости α и β, пересекающиеся с плоскостью γ по прямым a и b соответственно. *Докажите*, что $a \parallel b$.

Урок 14. Работа по карточкам

Карточка № 1 (I уровень)



№ 1

Треугольник ABC и квадрат $AEFC$ не лежат в одной плоскости (см. рисунок). Точки K и M – середины отрезков AB и BC соответственно.
а) *Докажите*, что $KM \parallel EF$.
б) *Найдите* KM, если AE = 8 см.

№ 2

Плоскость α проходит через основание AD трапеции $ABCD$. Точки E и F – середины отрезков AB и CD соответственно.
Докажите, что $EF \parallel \alpha$.

№ 3

Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Среди прямых, проходящих через любые две из данных точек, укажите прямую, которая является скрещивающейся:
а) с прямой AB;
б) с прямой BC.
Ответ обоснуйте.

Карточка № 2 (II уровень)

№ 1

Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Точки E, F, M, K – середины отрезков AB, BC, CD и AD – соответственно.

а) *Докажите*, что $EFMK$ – параллелограмм.

б) *Найдите* периметр $EFMK$, если $AC = 6$ см, $BD = 8$ см.

№ 2

Точка A лежит в плоскости α, параллельной прямой a. Через точку A проведена прямая b, параллельная прямой a.

Докажите, что прямая b лежит в плоскости α.

№ 3

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите три прямые, проходящие:

а) через точку D и скрещивающиеся с прямой AB_1;

б) через точку B_1 и скрещивающиеся с прямой A_1D.

Дайте обоснование ответа.

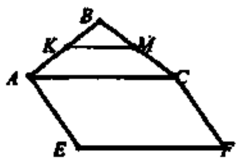
Карточка № 1 (I уровень)

№ 1

Треугольник ABC и квадрат $AEFC$ не лежат в одной плоскости (см. рисунок). Точки K и M – середины отрезков AB и BC соответственно.

а) *Докажите*, что $KM \parallel EF$.

б) *Найдите* KM, если $AE = 8$ см.



№ 2

Плоскость α проходит через основание AD трапеции $ABCD$. Точки E и F – середины отрезков AB и CD соответственно.

Докажите, что $EF \parallel \alpha$.

№ 3

Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Среди прямых, проходящих через любые две из данных точек, укажите прямую, которая является скрещивающейся:

а) с прямой AB;

б) с прямой BC.

Ответ обоснуйте.

Карточка № 3 (III уровень)

№ 1

Точка M, лежащая вне плоскости $\triangle ABC$, соединена с его вершинами. D и E – точки пересечения медиан треугольников MAB и MBC соответственно.

а) *Докажите*, что $ADEC$ – трапеция.

б) *Найдите* DE, если $AC = 12$ см.

№ 2

Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 не лежат в одной плоскости и пересекаются в точке O, являющейся серединой каждого из них.

Докажите, что прямая AB параллельна плоскости A_1CB_1.

№ 3

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите в данном кубе количество пар скрещивающихся ребер. Дайте обоснование взаимного расположения для одной из этих пар.

Урок 15. Контрольная работа по теме «Аксиомы стереометрии. Взаимное расположение прямых, прямой и плоскости»

I уровень

Вариант I

1. Прямые a и b пересекаются. Прямая c является скрещивающейся с прямой a. Могут ли прямые b и c быть параллельными?
2. Плоскость α проходит через середины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ – точки M и N.
   а) *Докажите*, что $AD \parallel \alpha$.
   б) *Найдите* BC, если $AD = 10$ см, $MN = 8$ см.
3. Прямая MA проходит через вершину квадрата $ABCD$ и не лежит в плоскости квадрата.
   а) *Докажите*, что MA и BC – скрещивающиеся прямые.
   б) *Найдите* угол между прямыми MA и BC, если $\angle MAD = 45°$

Вариант II

1. Прямые a и b пересекаются. Прямые a и c параллельны. Могут ли прямые b и c быть скрещивающимися?
2. Плоскость α проходит через основание AD трапеции $ABCD$. M и N – середины боковых сторон трапеции.
   а) *Докажите*, что $MN \parallel \alpha$.
   б) *Найдите* AD, если $BC = 4$ см, $MN = 6$ см.
3. Прямая CD проходит через вершину треугольника ABC и не лежит в плоскости ABC. E и F – середины отрезков AB и BC.
   а) *Докажите*, что CD и EF – скрещивающиеся прямые.
   б) *Найдите* угол между прямыми CD и EF, если $\angle DCA = 60°$.

II уровень

Вариант I

1. Прямая a параллельна плоскости α, а прямая b лежит в плоскости α. Определите, могут ли прямые a и b:
   а) быть параллельными;
   б) пересекаться;
   в) быть скрещивающимися.
2. Точка M не лежит в плоскости трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$).
   а) *Докажите*, что треугольники MAD и MBC имеют параллельные средние линии.
   б) *Найдите* длины этих средних линий, если $AD : BC = 5 : 3$, а средняя линия трапеции равна 16 см.
3. Через вершину A квадрата $ABCD$ проведена прямая KA, не лежащая в плоскости квадрата.
   а) *Докажите*, что KA и CD – скрещивающиеся прямые.
   б) *Найдите* угол между KA и CD, если $\angle AKB = 850$, $\angle ABK = 450$.

Вариант II

1. Прямая a параллельна плоскости α, а прямая b пересекает плоскость α. Определите, могут ли a и b:
   а) быть параллельными;
   б) пересекаться;
   в) быть скрещивающимися.
2. Треугольник ABC и трапеция $KMNP$ имеют общую среднюю линию EF, причем $KP \parallel MN$, $EF \parallel AC$.
   а) *Докажите*, что $AC \parallel KP$.
   б) *Найдите* KP и MN, если $KP : MN = 3 : 5$, $AC = 16$ см.
3. Точка M не лежит в плоскости ромба $ABCD$.
   а) *Докажите*, что MC и AD – скрещивающиеся прямые.
   б) *Найдите* угол между MC и AD, если $\angle MBC = 700$, $\angle BMC = 650$.

III уровень

Вариант I

1. Плоскости α и β пересекаются по прямой l. Прямая a параллельна прямой l и является скрещивающейся с прямой b. Определите, могут ли прямые a и b:
   а) лежать в одной из данных плоскостей;
   б) лежать в разных плоскостях α и β;
   в) пересекать плоскости α и β. В случае утвердительного ответа укажите взаимное расположение прямых a и b.
2. Плоскость α пересекает стороны AB и BC треугольника ABC в точках M и N соответственно, причем $AM : MB = 3 : 4$, $CN : BC = 3 : 7$.
   а) *Докажите*, что $AC \parallel \alpha$.
   б) *Найдите* AC, если $MN = 16$ см.
3. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Найдите угол между прямыми AC и BD, если $AC = 6$ см, $BD = 8$ см, а расстояние между серединами отрезков AD и BC равно 5 см.

Вариант II

1. Плоскости α и β пересекаются по прямой l. Прямые l и a пересекаются, а прямые l и b параллельны. Определите, могут ли прямые a и b:
   а) лежать в одной из плоскостей;
   б) лежать в разных плоскостях α и β;
   в) пересекать плоскости α и β. В случае утвердительного ответа укажите взаимное расположение прямых a и b.
2. Плоскость α проходит через сторону AC треугольника ABC. Прямая пересекает стороны AB и BC данного треугольника в точках M и N соответственно, причем $BN : NC = 2 : 3$, $AM : AB = 3 : 5$.
   а) *Докажите*, что $MN \parallel \alpha$.
   б) *Найдите* MN, если $AC = 30$ см.
3. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Найдите угол между прямыми AB и CD, если $AB = CD = 6$ см, а расстояние между серединами отрезков AD и $BC = 3$ см.

Урок 17. Самостоятельная работа

I уровень

Вариант I

1. Через вершины A и C параллелограмма $ABCD$ проведены параллельные прямые A_1A и $C1C$, не лежащие в плоскости параллелограмма.
   Докажите параллельность плоскостей A_1AB и C_1CD.
2. Параллельные прямые a и b пересекают одну из двух параллельных плоскостей в точках A_1 и B_1, а другую в точках A_2 и B_2 соответственно.
   а) *Докажите*, что $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.
   б) *Найдите* $\angle A_2A_1B_1$, если $\angle A_1A_2B_2 = 140°$.

Вариант II

1. Через вершины A и C параллелограмма $ABCD$ проведены параллельные прямые A_1A и C_1C, не лежащие в плоскости параллелограмма.
   Докажите параллельность плоскости A_1AD и C_1CB.
2. Параллельные прямые a и b пересекают одну из двух параллельных плоскостей в точках A_1 и B_1, а другую – в точках A_2 и B_2 соответственно.
   а) *Докажите*, что $A_1B_1 = A_2B_2$.
   б) *Найдите* $\angle B_1B_2A_2$, если $\angle B_1A_1A = 50°$.

II уровень

Вариант I

1. Параллелограммы $ABCD$ и A_1B_1CD не лежат в одной плоскости.
   Докажите параллельность плоскостей BCB_1 и ADA.
2. Концы двух пересекающихся отрезков AC и BD лежат на двух параллельных плоскостях, причем расстояние между точками одной плоскости равны.
   а) *Докажите*, что $AB \parallel CD$.
   б) Один из углов четырехугольника $ABCD$ равен 65°.
   Найдите остальные углы.

Вариант II

1. Параллелограммы $ABCD$ и ABC_1D_1 не лежат в одной плоскости. Докажите параллельность плоскостей CBC_1 и DAD_1.
2. Концы двух пересекающихся отрезков AC и BD лежат на двух параллельных плоскостях, причем расстояние между точками одной плоскости равны.
   а) *Докажите*, что $AD \parallel BC$.
   б) Один из углов четырехугольника $ABCD$ равен 130°. Найдите остальные углы.

III уровень

Вариант I

1. Каждая из двух прямых параллельна плоскостям α и β. При каком взаимном расположении данных прямых можно утверждать, что α ∥ β? Ответ объясните.
2. Концы двух равных пересекающихся отрезков AC и BD лежат на двух параллельных плоскостях.
   а) При каком дополнительном условии пересечения отрезков $ABCD$ – прямоугольник?
   б) *Докажите*, что если $ABCD$ не является прямоугольником, то $ABCD$ – равнобокая трапеция.

Вариант II

1. Прямая a лежит в плоскости α и параллельна плоскости β. Прямая b параллельна плоскостям α и β. При каком взаимном расположении данных прямых можно утверждать, что α ∥ β? Ответ объясните.
2. Концы двух равных перпендикулярных отрезков AC и BD лежат на двух параллельных плоскостях.
   а) При каком дополнительном условии пересечения отрезков $ABCD$ – квадрат?
   б) *Докажите*, что если $ABCD$ не является квадратом, то $ABCD$ – трапеция, в которой высота равна средней линии.

Урок 25. Контрольная работа № 1

I уровень

Вариант I

1. Даны параллельные плоскости α и β. Через точки A и B плоскости проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость β в точках A_1 и B_1.
   Найдите A_1B_1, если $AB = 5$ см.
2. Верно, что плоскости параллельны, если прямая, лежащая в одной плоскости, параллельна другой плоскости?
3. Две плоскости параллельны между собой. Из точки M, не лежащей ни в одной из этих плоскостей, ни между плоскостями, проведены две прямые, пересекающие эти плоскости соответственно в точках A_1 и A_2, B_1 и B_2. Известно, что $MA_1 = 4$ см, $B_1B_2 = 9$ см, $A_1A_2 = MB_1$. *Найдите* MA_2 и MB_2.

Вариант II

1. Отрезки AB и CD параллельных прямых заключены между параллельными плоскостями. Найдите AB, если $CD = 3$ см.
2. Верно ли утверждение, что плоскости параллельны, если две прямые, лежащие в одной плоскости, соответственно параллельны двум прямым другой плоскости?
3. Из точки O, лежащей вне двух параллельных плоскостей α и β, проведены три луча, пересекающие плоскости α и β соответственно в точках A, B, C и A_1, B_1, C_1 ($OA < OA_1$). *Найдите* периметр $A_1B_1C_1$, если $OA = m$, $AA_1 = n$, $AB = b$, $BC = a$.

II уровень

Вариант I

1. Построить сечение, проходящее через линии и точки, выделенные на чертеже (рис. 1).
2. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 2 см.
   Найдите расстояние между прямыми AB и B_1D.
3. *Докажите*, что линии пересечения двух пар параллельных плоскостей параллельны.

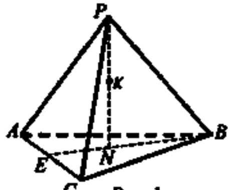


Рис. 1

Вариант II

1. Построить сечение, проходящее через линии и точки, выделенные на чертеже (рис. 2).
2. Дан прямой параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, основанием которого является ромб $ABCD$, угол $BAD = 30°$, $AB = 18$, $BB_1 = 12$.
   Найти площадь AB_1C_1D.
3. Непараллельные отрезки AB и CD лежат соответственно в параллельных плоскостях α и β. Что можно сказать о взаимном расположении прямых AC и BD?

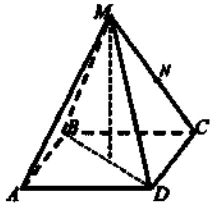


Рис. 2

III уровень

Вариант I

1. Построить сечение, проходящее через точки, выделенные на рисунке (рис. 1).
2. Между двумя параллельными плоскостями заключены перпендикуляр длиной 3 м и наклонная, равная 5 м. Расстояние между концами их (в каждой плоскости) равно 4 м.
   Найдите расстояние между серединами перпендикуляра и наклонной.

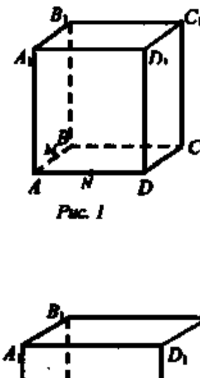
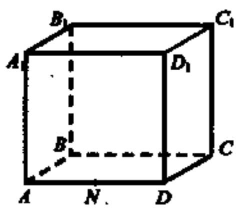


Рис. 1

Вариант II

1. Построить сечение, проходящее через точки, выделенные на рисунке (рис. 2).
2. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AD = a$, $AB = b$, $AA_1 = c$.
   Найдите длины отрезков D_1P и CN, где P – середина отрезков B_1C, N – середина отрезка A_1B_1.



Урок 30. Самостоятельная работа

I уровень

<table>
<tr><th>Вариант I</th><th>Вариант II</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Отрезок AB не пересекает плоскость α. Через точки A и B проведены прямые, перпендикулярные к плоскости α и пересекающие ее в точках A_1 и B_1 соответственно.</td></tr>
<tr><td>Найдите AB, если $A_1B_1 = 12$ см, $AA_1 = 6$ см, $BB_1 = 11$ см.</td><td>Найдите A_1B_1, если $AB = 13$ см, $AA_1 = 3$ см, $BB_1 = 8$ см.</td></tr>
<tr><td>2. Через вершины A и B прямоугольника $ABCD$ проведены параллельные прямые A_1A и B_1B, не лежащие в плоскости прямоугольника. Известно, что $A_1A \perp AB$ и $A_1A \perp AD$.
Найдите B_1B, если $B_1D = 25$ см, $AB = 12$ см, $AD = 16$ см.</td><td>2. Через вершины A и B ромба $ABCD$ проведены параллельные прямые A_1A и B_1B, не лежащие в плоскости ромба. Известно, что $B_1B \perp BC$, $B_1B \perp AB$.
Найдите AA_1, если $A_1C = 13$ см, $BD = 16$ см, $AB = 10$ см.</td></tr>
</table>

II уровень

<table>
<tr><th>Вариант I</th><th>Вариант II</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Отрезок AB пересекает плоскость α в точке O. Прямые AA_1 и BB_1 перпендикулярны к плоскости α и пересекают ее в точках A_1 и B_1 соответственно.</td></tr>
<tr><td>Найдите AB, если $A_1A = 4$ см, $\angle A_1AO = 60°$, $A_1O : OB_1 = 1 : 2$.</td><td>Найдите AB, если $B_1B = 3\sqrt{2}$ см, $\angle OBB_1 = 45°$, $A_1A : B_1B = 1 : 3$.</td></tr>
<tr><td>2. Прямая KA перпендикулярна к плоскости прямоугольника $ABCD$.
Докажите перпендикулярность прямых KB и BC.</td><td>2. Прямая MB перпендикулярна к плоскости квадрата $ABCD$.
Докажите перпендикулярность прямых MC и CD.</td></tr>
</table>

III уровень

<table>
<tr><th>Вариант I</th><th>Вариант II</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Через вершины B и D прямоугольника $ABCD$ проведены прямые B_1B и D_1D, перпендикулярные к плоскости прямоугольника.</td></tr>
<tr><td>а) Докажите параллельность плоскости ABB_1 и CDD_1.
б) Известно, что $BB_1 = DD_1 = 12$ см. Отрезок B_1D_1 пересекает плоскость ABC.
Найдите его длину, если $AB = 6$ см, $BC = 8$ см.</td><td>а) Докажите параллельность плоскостей CBB_1 и DAA_1.
б) Отрезок B_1D_1 пересекает плоскость ABC, причем $BB_1 = DD_1 = 12$ см, $B_1D_1 = 26$ см.
Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, если $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{3}{4}$.</td></tr>
<tr><td>2. Квадраты $ABCD$ и $AECF$ расположены так, что $BD \perp EF$.
а) Докажите, что прямая EF перпендикулярна к плоскости ABC.
б) Найдите угол между прямыми AC и ED.</td><td>2. Квадраты $ABCD$ и $ABEF$ расположены так, что $AD \perp AF$.
а) Докажите, что прямая BC перпендикулярна к плоскости AEF.
б) Найдите угол между прямыми AD и BF.</td></tr>
</table>

Урок 53. Тест

Т–1.

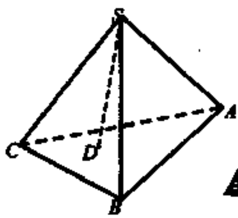
Вариант I

1. Из данных утверждений выберите верное: а) все ребра правильной пирамиды равны; б) площадь поверхности пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему; в) боковые грани усеченной пирамиды – трапеции; г) утверждения *а–в* не верны.
2. *Найдите* площадь боковой поверхности пирамиды, все грани которой наклонены к основанию под углом 60°, а в основании лежит прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 6 см. а) 9 см^2, б) 10 см^2, в) 12 см^2, г) другой ответ.
3. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 5 см, а плоский угол при вершине пирамиды 60°. *Найдите* боковое ребро пирамиды.

а) 6 см, б) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ см, в) 5 см, г) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ см, д) другой ответ.

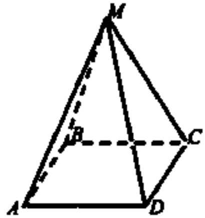
4. В основании пирамиды *SABC* лежит равнобедренный треугольник *ABC*, в котором *BC* = 12 см, а *AB* = *AC* = 10 см. Найдите площадь сечения *ASM*, если оно перпендикулярно плоскости основания, а все боковые ребра пирамиды равны 10 см.

а) $3\sqrt{65}$ см^2, б) $5\sqrt{39}$ см^2, в) 31 см^2, г) другой ответ.



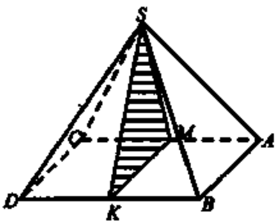
5. Боковые ребра пирамиды *SABC* равны между собой. *SD* – высота пирамиды. Точка *D* лежит внутри ΔABC. Треугольник ABC:
а) прямоугольный;
б) остроугольный;
в) тупоугольный;
г) недостаточно данных.
6. Найдите площадь диагонального сечения правильной усеченной четырехугольной пирамиды, если ее высота равна $\sqrt{2}$ см, а стороны оснований 1 см и 4 см.
а) 10 см^2, б) 2,5 см^2, в) 5 см^2, г) другой ответ.

Вариант II



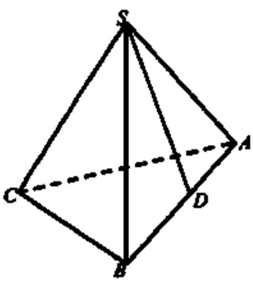
1. Из данных утверждений выберите верное: а) все грани правильной пирамиды равны; б) площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению суммы периметров оснований на апофему; в) боковые грани усеченной пирамиды – трапеции; г) утверждения *а–б* не верны.
2. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, все грани которой наклонены к основанию над углом 45°, а в основании лежит квадрат с диагональю, равной $18\sqrt{2}$ см.

   а) $324\sqrt{2}$ см^2, б) $162\sqrt{2}$ см^2, в) $81\sqrt{2}$, г) другой ответ.

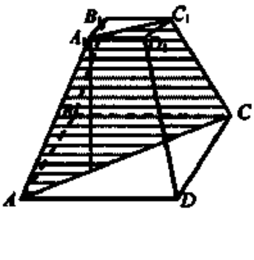


3. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна $4\sqrt{3}$ см, а плоский угол при вершине пирамиды равен 90°. Найдите высоту пирамиды. а) $2\sqrt{2}$ см, б) $3\sqrt{2}$ см, в) $\sqrt{2}$ см, г) $4\sqrt{2}$, д) другой ответ.
4. В основании пирамиды *ABCD*, все боковые ребра которой равны $\sqrt{74}$ см, лежит прямоугольник со сторонами $AB = 8$ см и $BC = 6$ см. *Найдите* площадь сечения *MSN*, если оно перпендикулярно плоскости основании, а $BM : MC = 2 : 1$.

   а) $14\sqrt{14}$ см, б) $14\sqrt{15}$ см, в) $15\sqrt{15}$ см, г) другой ответ.



5. Боковые ребра пирамиды *SABC* равны между собой. *SD* – высота пирамиды. Точка *D* – середина ребра *BC*. Треугольник *ABC*:
   а) прямоугольный,
   б) остроугольный,
   в) тупоугольный,
   г) недостаточно данных.



6. Площадь диагонального сечения в правильной усеченной четырехугольной пирамиды равна 20 см^2, а стороны основания 2 см и 8 см. Найдите ее высоту.

   а) $4\sqrt{2}$ см, б) $3\sqrt{2}$ см, в) $4\sqrt{2}$ см, г) другой ответ

I уровень

Вариант I

1) Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8 см. *Найдите* площадь боковой поверхности призмы, если ее наибольшая боковая грань – квадрат.
2) Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно 4 см и образует с плоскостью основания пирамиды угол 45°.
   а) *Найдите* высоту пирамиды.
   б) *Найдите* площадь боковой поверхности пирамиды.
3) Ребро правильного тетраэдра *DABC* равно *a*. *Постройте* сечение тетраэдра, проходящее через середину ребра *DA* параллельно плоскости *DBC*, и *найдите* площадь этого сечения.

Вариант II

1) Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с гипотенузой 13 см и катетом 12 см. *Найдите* площадь боковой поверхности призмы, если ее наименьшая боковая грань – квадрат.
2) Высота правильной четырехугольной пирамиды равна $\sqrt{6}$ см, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 60°.
   а) *Найдите* боковое ребро пирамиды.
   б) *Найдите* площадь боковой поверхности пирамиды.
3) Ребро правильного тетраэдра *DABC* равно *a*. *Постройте* сечение тетраэдра, проходящее через середины ребер DA и AB параллельно ребру BC, и *найдите* площадь этого сечения.

II уровень

Вариант I

1) Основание прямого параллелепипеда – ромб с диагоналями 10 и 24 см. Меньшая диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол 45°. *Найдите* площадь полной поверхности параллелепипеда.
2) Основание пирамиды – правильный треугольник с площадью $9\sqrt{3}$ см^2. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны к плоскости основания, а третья – наклонена к ней под углом 30°.
   а) *Найдите* длины боковых ребер пирамиды.
   б) *Найдите* площадь боковой поверхности пирамиды.
3) Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1$ равно *a*. *Постройте* сечение куба, проходящее через прямую B_1C и середину ребра *AD*, и *найдите* площадь этого сечения.

Вариант II

1) Основание прямого параллелепипеда – ромб с меньшей диагональю 12 см. Большая диагональ параллелепипеда равна $16\sqrt{2}$ см и образует с боковым ребром угол 45°. *Найдите* площадь полной поверхности параллелепипеда.
2) Основание пирамиды – равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой $4\sqrt{2}$ см. Боковые грани, содержащие катеты треугольника, перпендикулярны к плоскости основания, а третья грань наклонена к ней под углом 45°.
   а) *Найдите* длины боковых ребер пирамиды.
   б) *Найдите* площадь боковой поверхности пирамиды.
3) Ребро куба $ABCDA_1E_1C_1$ равно *a*. *Постройте* сечение куба, проходящее через точку *C* и середину ребра *AD* параллельно прямой DA_1, и *найдите* площадь этого сечения.

III уровень

Вариант I

1) Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с катетами 15 и 20 см. *Найдите* площадь полной поверхности призмы, если ее наименьшее сечение, проходящее через боковое ребро, – квадрат.
2) Основание пирамиды – ромб с большей диагональю d и острым углом α. Все двугранные углы при основании пирамиды равны β. *Найдите* площадь полной поверхности пирамиды.
3) Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. *Постройте* сечение куба, проходящее через середины ребер AA_1, B_1C_1 и CD, и *найдите* площадь этого сечения.

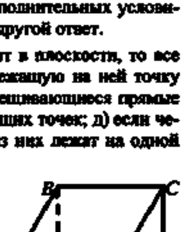
Вариант II

1) Основание прямой призмы – равнобедренный треугольник с основанием 24 см и боковой стороной 13 см. Наименьшее сечение призмы, проходящее через ее боковое ребро, является квадратом. *Найдите* площадь полной поверхности призмы.
2) Основание пирамиды – ромб с тупым углом α. Все двугранные углы при основании пирамиды равны β. *Найдите* площадь полной поверхности пирамиды, если ее высота равна H.
3) Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. *Постройте* сечение куба, проходящее через середины ребер A_1B_1, CC_1 и AD, и *найдите* площадь этого сечения.

Урок 63. Теоретический тест с последующей самопроверкой

Вариант I

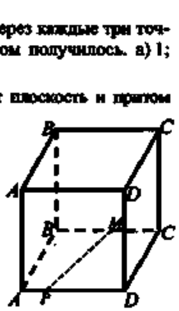
1. Какое из следующих утверждений верно: а) любые четыре точки лежат в одной плоскости; б) любые три точки лежат в одной плоскости; в) любые четыре точки не лежат в одной плоскости; г) через любые три точки проходит плоскость; д) через любые три точки проходит плоскость и притом только одна.
2. Сколько общих точек могут иметь две различные плоскости? а) 2; б) 3; в) несколько; г) бесконечно много; д) бесконечно много или ни одной.
3. Точки A, B, C лежат на одной прямой, точка D не лежит на ней. Через каждые три точки проведена одна плоскость. Сколько различных плоскостей при этом получилось? а) 2; б) 3; в) 1; г) 4; д) бесконечно много.
4. Если три точки не лежат на одной прямой, то положение плоскости в пространстве: а) не определяются в любом случае; б) определяются, но при дополнительных условиях; в) определяются в любом случае; г) ничего сказать нельзя; д) другой ответ.
5. Выберите верное утверждение: а) если одна точка прямой лежит в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости; б) через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна; в) через две перекрещивающиеся прямые плоскость провести нельзя; г) любые две плоскости не имеют общих точек; д) если четыре точки не лежат в одной плоскости, то какие-нибудь три из них лежат на одной прямой.
6. Назовите общую прямую плоскостей AFD и DEF: а) AD; б) DE; в) определить нельзя; г) DF; д) AF.
7. Какую из перечисленных плоскостей пересекает прямая EF? а) ABC; б) AA_1D; в) BB_1C_1; г) AEF; д) B_1C_1C.



8. Через точку M, не лежащую на прямой a, провели прямые, пересекающие прямую a. Тогда: а) эти прямые не лежат в одной плоскости; б) эти прямые лежат в одной плоскости; в) никакого вывода сделать нельзя; г) часть прямых лежит в плоскости, а часть – нет; д) все прямые совпадают с прямой a.
9. Прямая a лежит в плоскости α и пересекает плоскость β. Каково взаимное расположение плоскостей α и β? а) определить нельзя; б) они совпадают; в) имеют только одну общую точку; г) не пересекаются; д) пересекаются по некоторой прямой.
10. Точки A, B, C не лежат на одной прямой. $M \in AB$, $K \in AC$, $X \in MK$. Выберите верное утверждение: а) $X \in AB$; б) $X \in AC$; в) $X \in ABC$; г) X и M совпадают; д) точки X и K совпадают.

Вариант II

1. Что можно сказать о взаимном расположении плоскостей, которые имеют три общие точки, не лежащие на одной прямой? а) пересекаются; б) ничего сказать нельзя; в) не пересекаются; г) совпадают; д) имеют три общие точки.
2. Какое из утверждений верно? а) если две точки треугольника лежат в плоскости, то и весь треугольник лежит в плоскости; б) прямая, лежащая в плоскости треугольника пересекает его стороны; в) любые две плоскости имеют только одну общую точку; г) через две точки проходит плоскость, и притом только одна; д) прямая лежит в плоскости треугольника, если она пересекает две прямые, содержащие стороны треугольника.
3. Могут ли две различные плоскости иметь только две общие точки? а) никогда; б) могут, но при дополнительных условиях; в) всегда имеют; г) нельзя ответить на вопрос; д) другой ответ.
4. Точки *K*, *L*, *M* лежат на одной прямой, точка *N* не лежит на ней. Через каждые три точки проведена плоскость. Сколько различных плоскостей при этом получилось. а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) бесконечно много.
5. Выберите верное утверждение: а) через любые три точки проходит плоскость и притом только одна; б) если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости; в) если две плоскости имеют общую точку, то они не пересекаются; г) через прямую и точку лежащую на ней проходит плоскость и притом только одна; д) через две пересекающиеся прямые плоскость провести нельзя.



6. Назовите общую прямую плоскостей *PBM* и *MAB*: а) *PM*; б) *AB*; в) *PB*; г) *BM*; д) определить нельзя.
7. Какую из перечисленных плоскостей пересекает прямая *PM* (рис. 2)? а) DD_1C_1; б) D_1PM; в) B_1PM; г) *ABC*; д) *CAD*.
8. Две плоскости пересекаются по прямой *c*. Точка *M* лежит только в одной из плоскостей. Что можно сказать о взаимном расположении точки *M* и прямой *c*? а) вывода сделать нельзя; б) прямая *c* проходит через точку *M*; в) $M \in c$; г) прямая *c* не проходит через точку *M*; д) другой ответ.
9. Прямые *a* и *b* пересекаются в точке *M*. Прямая *c*, не проходящая через точку *M*, пересекает прямые *a* и *b*. Что можно сказать о взаимном расположении прямых *a*, *b* и *c*? а) они лежат в разных плоскостях; б) *a* и *b* лежат в одной плоскости, а прямая *c* в ней не лежит; в) все прямые лежат в одной плоскости; г) ничего сказать нельзя; д) прямая *c* совпадает с одной из прямых.
10. Прямые *a* и *в* пересекаются в точке *O*. $A \in a$, $B \in b$, $У \in AB$. Выберите верное утверждение: а) точки *O* и *У* лежат в разных плоскостях; б) прямая $OУ \parallel a$; в) прямые *a*, *b* и точка *У* лежат в одной плоскости; г) точки *O* и *У* совпадают; д) *У* и *A* совпадают.

Урок 66. Контрольная работа № 5

I уровень

Вариант I

1. Дан прямоугольный треугольник *ABC* с гипотенузой *AC* = 13 см и катетом *BC* = 5 см. Отрезок *SA* = 12 см, – перпендикуляр к плоскости *ABC*.

   а) Найдите $|\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CB}|$; б) Найдите угол между прямой SB и плоскостью *ABC*.
2. В правильной четырехугольной пирамиде диагональ основания равна $8\sqrt{2}$ см, а двугранный угол при основании равен 60°. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.
3. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящей через вершину D и середины ребер AA_1 и A_1B_1.

Вариант II

1. Дан прямоугольный треугольник *ABC* с гипотенузой *AC* = 16 см и катетом *BC* = 12 см. Отрезок *SC* = 20 см, – перпендикуляр к плоскости *ABC*.

   а) Найдите $|\overrightarrow{CS} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}|$. б) Найдите угол между прямой *SA* и плоскостью *ABC*.
2. В правильной четырехугольной пирамиде диагональ основания равна $4\sqrt{3}$ см, а двугранный угол при основании равен 60°. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.
3. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящей через прямую AB и середину ребра B_1C_1.

II уровень

Вариант I

1. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O. SA – перпендикуляр к плоскости ромба. $SA = 3\sqrt{3}$ см, $AC=6$ см.
   а) Докажите, что прямая BD перпендикулярна к плоскости SAO. б) Найдите $\left|\overrightarrow{SD} + 1/2\,(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC})\right|$. в) Найдите двугранный угол $SDBA$.
2. В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен 120°. Отрезок, соединяющий основание высоты пирамиды с серединой бокового ребра, равен 3 см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.
3. Постройте сечение правильного тетраэдра $DABC$, проходящего через середины ребер AD и BC параллельно ребру DB.

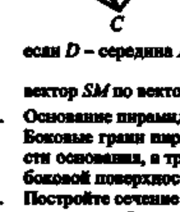
Вариант II

1. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O. SA – перпендикуляр к плоскости ромба $SO = 6$ см, $AB = 5$ см, $BD = 8$ см.
   а) Докажите, перпендикулярность плоскостей SBD и SAO. а) Найдите $\left|1/2(\overline{AD}+\overline{AB})+\overline{OS}\right|$.
   в) Найдите угол между прямой SO и плоскостью ABC.
2. В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при основании равен 60°. Отрезок, соединяющий основание высоты пирамиды с серединой апофемы, равен 3 см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.
3. Постройте сечение правильного тетраэдра $DABC$, проходящего через середины ребер AD и AB параллельно ребру AC.

III уровень

Вариант I

1. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC. SB – перпендикуляр к плоскости ABC. Двугранный угол $SACB$ равен 45°.
   а) Докажите перпендикулярность плоскостей SBA и SBC. б) M – точка пересечения медиан треугольника SAC. Разложите вектор BM по векторам $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$.
2. Основание пирамиды – прямоугольный треугольник с катетом а и противолежащим углом α. Боковые грани пирамиды, содержащие данный катет и гипотенузу основания, перпендикулярны к плоскости основания, а третья боковая грань наклонена к ней под углом B. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.



3. Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, проходящей через середины ребер основания AD и CD параллельно ребру SD.

Вариант II

1. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC. SB – перпендикуляр к плоскости ABC. Прямые SA и SC образуют с плоскостью ABC угол 30°.
   а) Докажите перпендикулярность плоскостей SAC и SBD, если D – середина AC. б) M – точка пересечения медиан треугольника SAC. Разложите вектор SM по векторам $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$.
2. Основание пирамиды – прямоугольный треугольник с гипотенузой с и острым углом α. Боковые грани пирамиды, содержащие катеты основания, перпендикулярны к плоскости основания, а третья боковая грань наклонена к ней под углом B. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
3. Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, проходящей через середины ребра основания AD и бокового ребра SA параллельно прямой AC.

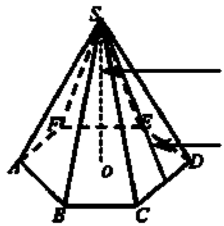
Урок 67. Мини-тест по теории

Вариант I		*Вариант II*	
I. Если $M(-2; -4)$, $N(-3; -5)$, то $\overrightarrow{MN}$ имеет координаты ...	1. (1; 1); 2. (–5; –9); 3. (–1; –1); 4. нет правильного ответа.	I. Если $M(-2; -4)$, $N(-3; -5)$, то $\overrightarrow{NM}$ имеет координаты...	1. (1; 1); 2. (–5; –9); 3. (–1; –1); 4. нет правильного ответа.
II. Если $\vec{a} = \vec{b}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ...	1. равны; 2. одинаково направлены; 3. противоположны; 4. нет правильного ответа.	II. Если $\vec{a}(-2; 1)$ и $\vec{b}(2; -1)$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ...	1. равны; 2. одинаково направлены; 3. противоположны; 4. нет правильного ответа.
III. Сумма вектора $\overrightarrow{KB}$ и $\overrightarrow{KC}$ есть вектор...	1. $\overrightarrow{BC}$; 2. $\overrightarrow{CB}$; 3. $\overrightarrow{KD}$, если $KBDC$ – параллелограмм; 4. нет правильного ответа.	III. Разность векторов $\overrightarrow{KB}$ и $\overrightarrow{KC}$ есть вектор...	1. $\overrightarrow{BC}$; 2. $\overrightarrow{CB}$; 3. $\overrightarrow{KD}$, если $KBDC$ – параллелограмм; 4. нет правильного ответа.
IV. Если $\vec{a} \downarrow\downarrow \vec{b}$ и $\vec{c} \downarrow\uparrow \vec{b}$, то ...	1. $\vec{a} \downarrow\downarrow \vec{c}$; 2. $\vec{a} \downarrow\uparrow \vec{c}$; 3. $\vec{a} = -\vec{b}$; 4. нет правильного ответа.	IV. Если $\vec{a} \downarrow\uparrow \vec{b}$ и $\vec{b} \downarrow\uparrow \vec{c}$, то ...	1. $\vec{a} \downarrow\downarrow \vec{c}$; 2. $\vec{a} \downarrow\uparrow \vec{c}$; 3. $\vec{a} = -\vec{c}$; 4. нет правильного ответа.
V. Если скалярное произведение двух ненулевых векторов отрицательно, то угол между векторами...	1. острый; 2. прямой; 3. тупой; 4. нет правильного ответа.	V. Если скалярное произведение двух ненулевых векторов положительно, то угол между векторами...	1. острый; 2. прямой; 3. тупой; 4. нет правильного ответа.

Приложение 2

ПЛАКАТЫ № 1, 2, 3, 4, рекомендуемые к урокам № 51, 52, 53

ПЛАКАТ № 1



Пирамида

Так называется многогранник, одна грань которого (основание) – многогранник, а все остальные грани (боковые) – треугольники, имеющие общую вершину (вершина пирамиды).

Усеченной пирамидой называется часть пирамиды, заключенная между ее основанием и сечением пирамиды, параллельным основанию

Правильная пирамида

Пирамида называется правильной, если основание ее – правильный многогранник, а вершина проецируется в центр основания. Боковые грани – равные равнобедренные треугольники. Боковые ребра равны. Апофемы равны (апофемой пирамиды называется высота ее боковой грани, проведенная из вершины пирамиды, противоположной основанию).

ПЛАКАТ № 2

Площадь поверхности и объем произвольной пирамиды

	Пирамида	Усеченная пирамида
Боковая поверхность	$S_{бок.} = \sum_{i=1}^{n} S_i$, где Si – площадь одной боковой грани, $\sum_{i=1}^{n}$ – знак суммы	$S_{бок.} = \sum_{i=1}^{n} S_i$, где Si – площадь одной боковой грани, $\sum_{i=1}^{n}$ – знак суммы
Полная поверхность	$S_{полн.} = S_{бок.} + S_{осн.}$	$S_{полн.} = S_{бок.} + S + s$, где S – площадь нижнего основания; s – площадь верхнего основания.
Объем	$V = \frac{1}{3} H \cdot S_{осн.}$	$V = \frac{1}{3} H \cdot (S + s' + \sqrt{Ss})$

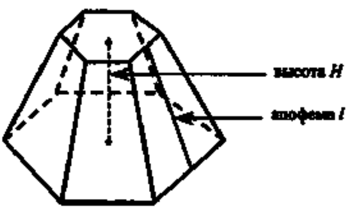
ПЛАКАТ № 3

Площадь поверхности и объем правильной пирамиды

	Пирамида	Усеченная пирамида
Боковая поверхность	$S_{бок.} = P \cdot l$, где P – периметр основания; l – апофема.	$S_{бок.} = \frac{1}{2}(P + p) \cdot l$, где P – периметр нижнего основания; p – периметр верхнего основания; l – апофема.
Полная поверхность	$S_{полн.} = S_{бок.} + S_{осн.}$	$S_{полн.} = S_{бок.} + S + s$, где S – площадь нижнего основания; s – площадь верхнего основания
Объем	$V = \frac{1}{3} H \dots \cdot S_{осн.}$	$V = \frac{1}{3} H \dots \cdot (S + s' + \sqrt{Ss}\,)$

ПЛАКАТ № 4

Правильная усеченная пирамида



Боковые грани – равные равнобокие трапеции.
Боковые ребра равны.
Апофемы равны.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебно-методическое пособие

В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ

ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ ПО ГЕОМЕТРИИ

к учебному комплекту Л.С. Атанасяна и др. (*М.: Просвещение*)

10 класс

Налоговая льгота –
Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93-953000.

Подписано к печати с диапозитивов 20.04.2010.
Формат 84×108/32. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. листов 15,96. Тираж 5000 экз. Заказ № 3526.